C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica

16. 10. 2013

1. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases}.$$

2. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere il seguente sistema lineare (nel quale rispetto all'esempio della lezione del 16/10/2013 solo il termine noto dell'ultima equazione è stato cambiato da 8 a 9) con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases}.$$

   (Suggerimento: Dopo aver ridotto la matrice completa del sistema a una matrice a scala, si consiglia di riscrivere l'ultima riga di tale matrice come equazione.)

4. Siano $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tali che $a \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.
   (a) Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. (Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $a = 0$, purchè $ad - bc \neq 0$.)
   (b) Si scriva l'inversa di $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

5. Dati la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}'$ è il trasposto di $\mathbf{v}$.

6. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$. Date le matrici $\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ (si veda `http://www.agr.unipg.it/zoo/dispense/Genquant/blup.PDF`, pag. 15), calcolare

$$\mathbf{ZGZ}' + c\mathbf{I}.$$

   ($\mathbf{Z}'$ è la trasposta di $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{I}$ la matrice identità di ordine7.)