C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica

04. 12. 2013

1. Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:
$$N(t) = \frac{5}{1 + e^{-2t+3}}.$$

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

3. Nella reazione bimolecolare $2\,\mathrm{NO_2} \longrightarrow \mathrm{N_2O_4}$ la concentrazione $C = C(t) = [\mathrm{NO_2}]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.
   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

5. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$
dove k (in $\mathrm{s^{-1}M^{-1}}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti due casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 2$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 3$, $[\mathrm{B}]_0 = 2$.

6. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 3(20 - C) \\ C(0) = 5\,. \end{cases}$$
   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.
   (b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 10$.