C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 10/06/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano $a_0, \ldots, a_{10} \in \mathbb{N}$ tali che $a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0 = (x+1)^{10}$.
   Calcolare esplicitamente $a_0, \ldots, a_{10}$:

   Calcolare la somma $a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}$:

2. Dopo 42 giorni dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al 25% del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) 10, 5, (b) 14, (c) 5, 25, (d) 21 giorni

3. Quanto vale $-\log_{10}(3,2 \cdot 10^{-8})$ approssimativamente?
   (a) 4, 8, (b) 7, 5, (c) 8, 3, (d) 8, 5

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{7\pi}{6}$, calcolare

   (a) $f'(x) =$

   (b) i minimi e i massimi assoluti:

   $x_{\min} =$, $y_{\min} =$

   $x_{\max} =$, $y_{\max} =$

   (c) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $\left(\dfrac{5}{6}\pi, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$:

   (d) $f''(x) =$ La f è convessa? Sì: ☐ No: ☐

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_2^{2e} f(x)\,dx$:

   $f'(x) =$

   $\displaystyle\int_2^{2e} f(x)\,dx =$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{}$,

   dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

7. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a. Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

   Supponiamo che in un ambiente di 21 °C il corpo si raffreddi da 36 °C a 30 °C in 20 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 36 °C, in quanto tempo il corpo raggiunge i 26 °C? Si trovi la risposta in tre passi:

   (a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 21\,^\circ\mathrm{C}) \\ T(0) = 36\,^\circ\mathrm{C}\,. \end{cases}$$

$T(t) =$

   (b) Si usi $T(20 \text{ min}) = 30\,^\circ\mathrm{C}$ per determinare la costante k.

$k =$

   (c) Usando che $\ln(3) \approx 1,1$ e $\ln(5) \approx 1,6$, si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 26 °C (suggerimento: conviene utilizzare la soluzione $T(t)$ di (a) in forma implicita).
