C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 03/07/2014

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quante parole (anche senza significato) di 4 lettere, ripetute o no, si possono formare con l'alfabeto $\{a, b, c, d\}$?

   Quante di tali parole contengono due volte la a e due volte la b?

2. Supponiamo che una coltura batterica di *Escherichia coli* si trovi nella fase esponenziale della sua crescita. In condizioni nutrizionali poveri, il numero dei batteri *E. coli* cresce ogni 10 minuti del 20%. Allora in 40 minuti la coltura è cresciuta grosso modo del (a) 80%, (b) 110%, (c) 210%, (d) 380%.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x - 2) = -2$.

4. Data la funzione $f(x) = -1 + 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)\right|, \quad x \in \mathbb{R},$

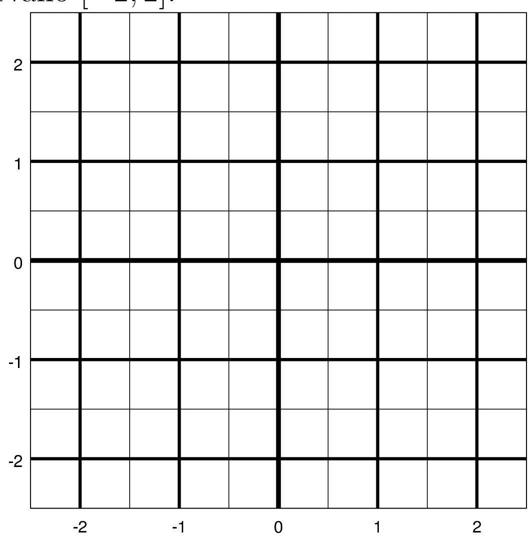
   (a) dire qual è il periodo minimo della f:

   (b) trovare i minimi e i massimi assoluti di f nell'intervallo $[-1, 1[$:

   $x_{\min} =$, $y_{\min} =$

   $x_{\max} =$, $y_{\max} =$

   (c) disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-2, 2]$:



5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, calcolare:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\boxed{}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\boxed{}$

$f'(x) =$ $\boxed{}$

$\int_0^1 f(x)\,dx =$ $\boxed{}$

(integrazione per sostituzione: $u = x^2 + 1$)

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$ $\boxed{}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} =$ $\boxed{}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} =$ $\boxed{}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} =$ $\boxed{}$,

   dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

7. Lo svuotamento di un serbatoio cilindrico avente sul fondo un foro di uscita (a scarico libero, cioè senza tubazione) può essere modellato attraverso il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh(t)} \\ h(0) = h_0\,, \end{cases}$$

   dove $h = h(t)$ è l'altezza della colonna d'acqua nel serbatoio al tempo t, h_0 la quota iniziale, $g \approx 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ l'accelerazione di gravità, S_1 la sezione del serbatoio e S_2 l'area del foro di uscita.

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy:

   $\boxed{h(t) = }$

   (b) Si calcoli il tempo di svuotamento t_s (in min) supponendo che $h_0 = 180\,\mathrm{cm}$ e che il serbatoio e il foro siano circolari di diametro $100\,\mathrm{cm}$ e $5\,\mathrm{cm}$ rispettivamente:

   $\boxed{t_s = }$