C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica
23. 10. 2013

1. Le scale di temperatura Celsius, Kelvin e Fahrenheit sono scale lineari tali che $0\,\mathrm{K} = -273.15°\mathrm{C}$ (zero assoluto), $0°\mathrm{C} = 32°\mathrm{F} = 273.15\,\mathrm{K}$ e $100°\mathrm{C} = 212°\mathrm{F}$.

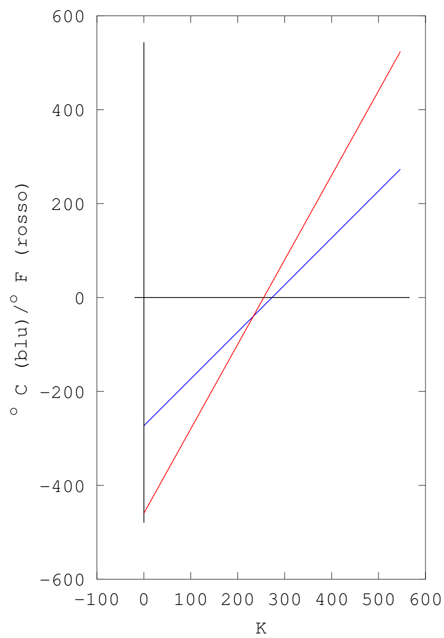
   (a) Se T_C, T_K, T_F indicano la temperatura nelle scale Celsius, Kelvin e Fahrenheit rispettivamente, scrivere la funzione $T_F = f_{FC}(T_C)$ che traduce gradi Celsius in gradi Fahrenheit, la funzione $T_C = f_{CK}(T_K)$ che traduce kelvin in gradi Celsius e specificare il dominio di queste funzioni.
   Il grafico di f_{FC} è una retta passante per i punti $(0, 32)$ e $(100, 212)$. Ne segue: $T_F = f_{FC}(T_C) = \frac{212-32}{100-0}T_C + 32 = \frac{9}{5}T_C + 32$, dominio: $T_C \geq -273.15$.
   Il grafico di f_{CK} è una retta passante per i punti $(0, -273.15)$ e $(273.15, 0)$. Ne segue: $T_C = f_{CK}(T_K) = T_K - 273.15$, dominio: $T_K \geq 0$.

   (b) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$, quale appartiene al grafico di f_{CK}?
   solo il secondo

   (c) Qual è la funzione inversa di f_{FC} e qual è il suo dominio?
   $f_{FC}^{-1}(T_F) = T_C = \frac{5}{9}T_F - 32$, dominio: $T_F \geq -\frac{9}{5} \times 273.15 + 32 = -459.67$

   (d) Scrivere la funzione composta $f_{FK} := f_{FC} \circ f_{CK}$.
   $f_{FK} = T_F = \frac{9}{5}(T_K - 273.15) + 32 = \frac{9}{5}T_K - 459.67$, dominio: $T_K \geq 0$

   (e) Disegnare nello stesso sistema di riferimento i grafici di f_{CK} e f_{FK}.

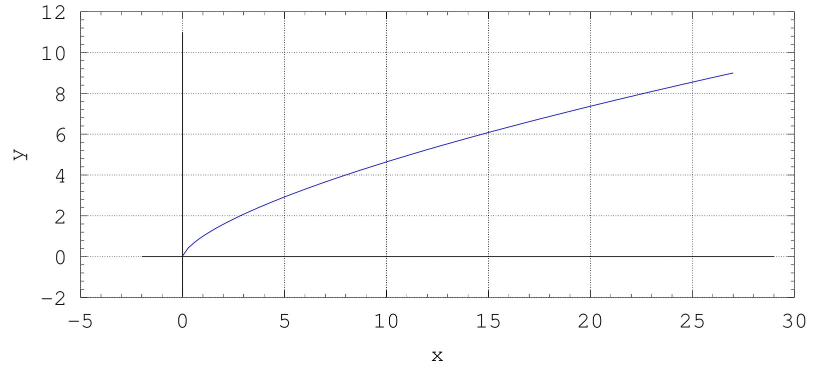


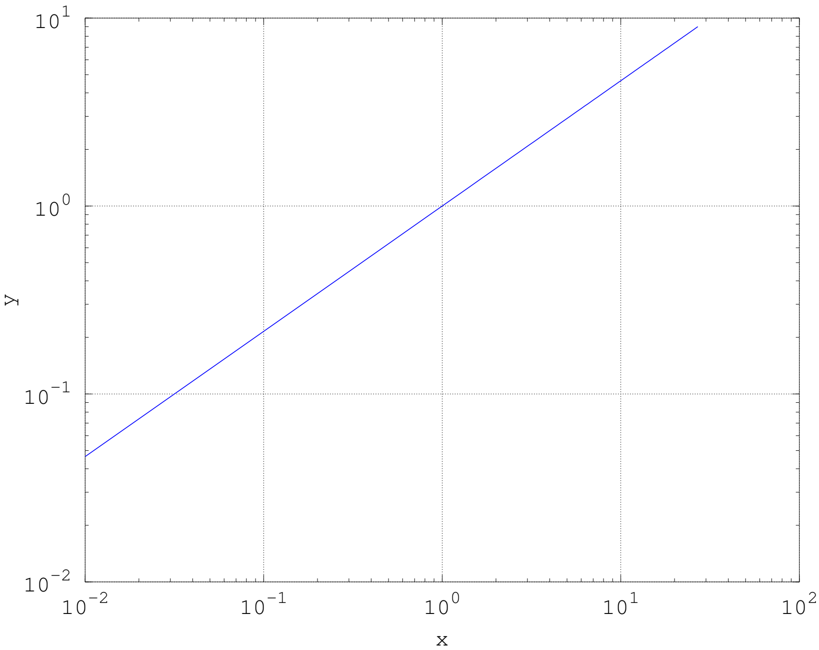
   (f) Per quale temperatura i valori delle scale Celsius e Fahrenheit coincidono?
   $T_F = f_{FC}(T_C) = T_C =: T \Rightarrow T = \frac{9}{5}T + 32 \Rightarrow T = -40$

2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$. Dire se la funzione è pari o dispari. Per quali valori di x il grafico della funzione si trova nel

III quadrante?
$f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 - 1$, $x \in \mathbf{R}$, pari, $(x, f(x)) \in$ III quadrante $\Leftrightarrow x < 0, f(x) = (\sqrt[3]{x})^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $(\sqrt[3]{x})^2 < 1 \Leftrightarrow x < 0$ e $|\sqrt[3]{x}| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

3. Disegnare il grafico della funzione $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $(x > 0)$ in scala logaritmica (su entrambi gli assi). È ragionevole rappresentare $f(x) = g(x) - 1$ in scala logaritmica? $\log g(x) = \frac{2}{3} \log x$, cioè $\log g(x)$ è proporzionale a $\log x$ e quindi la sua rappresentazione logaritmica è una retta; $\log f(x) = \log(x^{\frac{2}{3}} - 1)$ non si semplifica, la rappresentazione logaritmica non è consigliabile





4. Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2,3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva. Il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero $N(t)$ di atomi residui al tempo t può essere valutato in rapporto al numero N_0 di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \, .$$

   (a) Trovare la *costante di decadimento* λ (unità di misura?) per il ^{137}Cs. $N(1 \text{ anno}) = \mathrm{N_0 e^{-\lambda \cdot 1 \text{ anno}}} = \mathrm{N_0} - 0,023\mathrm{N_0}$, da cui si ricava

$$\lambda = -\frac{\ln(0,977)}{\text{anno}} = 0,023 \text{ anno}^{-1}$$

(b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e λ? Calcolare il tempo di dimezzamento di ^{137}Cs. $T_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda} = 30$ anni

(c) Dopo quanti anni la radioattività del ^{137}Cs si riduce a 1%?
$0,01N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$, da cui $t = \dfrac{\ln(100)}{\lambda} = 200$ anni.
Altro metodo: dopo 7 tempi di dimezzamento, ossia 210 anni, la radiaoattività si riduce a $1/2^7 = 1/128 \approx 1\%$

5. Il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Calcolare la costante di decadimento λ per il ^{134}Cs. $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 0,35$ anno^{-1}

6. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive ($e = 2,7\ldots$). Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:

(a) $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),
da $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ segue che $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = a$

(b) $f(t) = a\left(1 + \dfrac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}}\right)$ (funzione della cinetica chimica).

Suggerimento: distinguere i casi $a > b$, $a = b$ e $a < b$.
se $a > b \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = 0$
$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = a\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = b$;
se $a = b$, la f di sopra non è definita;
se $a < b \Rightarrow b-a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} be^{c(b-a)t} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = a(1+0) = a$