C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica

13. 11. 2013

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $v(t) = at + \frac{b}{t} + c$, (b) $y = 3\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$, (c) $y = \frac{x}{x-3}$,

   (a) $a - \frac{b}{t^2}$, (b) $-3\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x$, (c) $\frac{-3}{(x-3)^2}$,

   (d) $z(t) = (1-t)\cos t$, (e) $f(y) = a\sqrt{y}\cdot \mathrm{sen}\,y$, (f) $Q(\alpha) = \frac{1-\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$,

   (d) $-\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t$, (e) $a(\frac{\mathrm{sen}\,y}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}\cos y)$, (f) $\frac{\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha - 1}{(1+\cos\alpha)^2}$,

   (g) $h(\phi) = \frac{\mathrm{sen}\,2\phi}{\cos\,3\phi}$, (h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (i) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$

   (g) $\frac{2\cos 2\phi\cos 3\phi + 3\,\mathrm{sen}\,2\phi\,\mathrm{sen}\,3\phi}{\cos^2 3\phi}$, (h) $-3e^{3x}\,\mathrm{sen}(e^{3x})$, (i) $(-8x+1)\,\mathrm{sen}(4x^2 - x + 1)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $U(t) = qt^{-2}$, (b) $R(s) = \frac{1}{a-bs}$, (c) $R(s) = \frac{1}{\log_{10} s}$, (d) $v(t) = (3t-1)^{-2}$,

   (a) $-2qt^{-3}$, (b) $\frac{b}{(a-bs)^2}$, (c) $-\frac{\log_{10} e}{s(\log_{10} s)^2}$, (d) $-6(3t-1)^3$,

   (e) $y = \frac{x+1}{x-2}$, (f) $y = x\cdot\log_{10} x$, (g) $y = x\cdot\cos x$, (h) $f(x) = x\cdot\mathrm{sen}(|x|)$.

   (e) $-\frac{3}{(x-2)^2}$, (f) $\log_{10} x + \log_{10} e$, (g) $\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$, (h) $\mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

   Dire se la funzione f di (h) è derivabile anche nell'origine (motivare la risposta) e, in caso affermativo, calcolare $f'(0)$.
   $f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{sen}\,|\Delta x| = 0$, cioè per ogni $x\in\mathbf{R}$ si ha $f'(x) = \mathrm{sen}\,|x| + |x|\cos x$.

3. Le misure della lunghezza e della larghezza di un poster rettangolare sono 160cm e 90cm, entrambe con l'errore del 2%. Qual è l'errore percentuale (errore relativo) sull'area calcolata? Calcola la misura dell'area con l'errore assoluto.
   L'errore relativo di un prodotto è la somma degli errori relativi dei singoli fattori. Quindi l'errore percentuale sull'area calcolata è del 4%. Ne segue che l'area è pari a $(1,44\pm 0,06)\mathrm{m}^2$.
   Gli stessi risultati si ottengono calcolando valore min $= (160+0,02\cdot 160)\cdot(90+0,02\cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,50\mathrm{m}^2$ e valore min $= (160-0,02\cdot 160)\cdot(90-0,02\cdot 90)\mathrm{cm}^2 = 1,38\mathrm{m}^2$.
   Nota: Dalla precisione indicata attraverso gli errori percentuali segue che si hanno 3 cifre significative.

4. Misurando il volume di un cilindro metallico si trova $V = 10,0\ \mathrm{cm}^3 \pm 0,1\ \mathrm{cm}^3$; la massa del cilindro è $m = 27,1$ g $\pm\ 0,1$ g. Calcola la densità e l'errore percentuale sulla densità.
   valore max $= 27,2 : 9,9\,\mathrm{g/cm}^3 = 2,75\,\mathrm{g/cm}^3$, valore min $= 27,0 : 10,1\,\mathrm{g/cm}^3 = 2,67\,\mathrm{g/cm}^3$, ne segue che la densità è uguale a $(2,71\pm 0,04)$ $\mathrm{g/cm}^3$ e l'errore sulla densità è del $0,04/2,71\cdot 100\% = 1,5\%$.

2º metodo
L'errore relativo di un quoziente è la somma degli errori relativi del numeratore e del denominatore: $(0,1/27,1+0,1/10,0)\cdot 100\% = 1,4\%$. Ne segue che la densità è $(2,71 \pm 2,71 \cdot 0,014)\mathrm{g/cm}^3 = (2,71 \pm 0,04)\mathrm{g/cm}^3$.

5. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.
$y = f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 10000, f(x_0) = 100, \Delta x = 1, \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200} = 0,005, \sqrt{10001} = 100 + \Delta y \approx 100 + dy = 100,005.$

6. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.
$df(x,\Delta x) = -\frac{1}{x^2}\Delta x$, $df(1,\Delta x) = -\Delta x$, quindi $1,002^{-1} \approx 1 - df(1;0,002) = 1 - 0,002 = 0,998$; analogamente $0,997^{-1} \approx 1 + 0,003 = 1,003$.
I valori precisi sono $0,9980\ldots$ e $1,0030\ldots$ rispettivamente.

7. Si ricordi che il $p\mathrm{H}$ è definito come $p\mathrm{H} = -\log_{10} \mathrm{a_{H^+}}$, dove $\mathrm{a_{H^+}}$ indica l'attività adimensionale dei cationi ossonio.
   (a) Una soluzione abbia un $p\mathrm{H}$ di 4. Per quale $p\mathrm{H}$ l'attività $\mathrm{a_{H^+}}$ risulterebbe mille volte minore? $p\mathrm{H} = 7$
   (b) Se il $p\mathrm{H}$ è stato determinato con una accuratezza di un decimo di $p\mathrm{H}$, con quale errore percentuale si conosce $\mathrm{a_{H^+}}$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$.)
   Da $dy = -\log_{10} e \,\frac{\Delta x}{x} \approx -0,4\frac{\Delta x}{x}$ si ottiene $\frac{\Delta x}{x} \approx -2,5\Delta y$, ossia $\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}} \approx -2,5\,\Delta p\mathrm{H}$ e l'errore percentuale è $\left|\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}}100\%\right| \approx 2,5\cdot 0,1\cdot 100\% = 25\%$.
   Nota: L'esercizio contiene un errore. Se si conosce il $p\mathrm{H}$ con 2 cifre significative ci vuole $\log_{10} e \approx 0,43$ e si ottiene un errore del 23%. Un calcolo preciso mostra che alla variazione di $\pm 0,1$ del $p\mathrm{H}$ corrisponde una variazione di $\mathrm{a_{H^+}}$ del -21% e del $+26\%$ rispettivamente.

8. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, $x \neq 1$,
   (a) determinare gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente;
   $f'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$; per $x \leq -1$ la f è crescente e per $x \geq -1, x \neq 1$ decrescente.
   (b) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di intersezione del grafico con l'asse y.
   L'equazione della retta tangente nel punto $(0, f(0)) = (0,-1)$ è $y + 1 = f'(0)\cdot x = -x$, cioè $y = -x - 1$.

9. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\,\ln x, \quad x > 0.$$

$f'(x) = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x} \geq 0} \Leftrightarrow \ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow f$ è monotona crescente; ne segue che $(\frac{1}{e^2}, -\frac{2}{e})$ è un punto di minimo relativo di f
$f''(x) = -\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \Leftrightarrow f$ è convessa verso il basso; ne segue che il grafico della f presenta un flesso (discendente) nel punto $(1,0)$