C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica

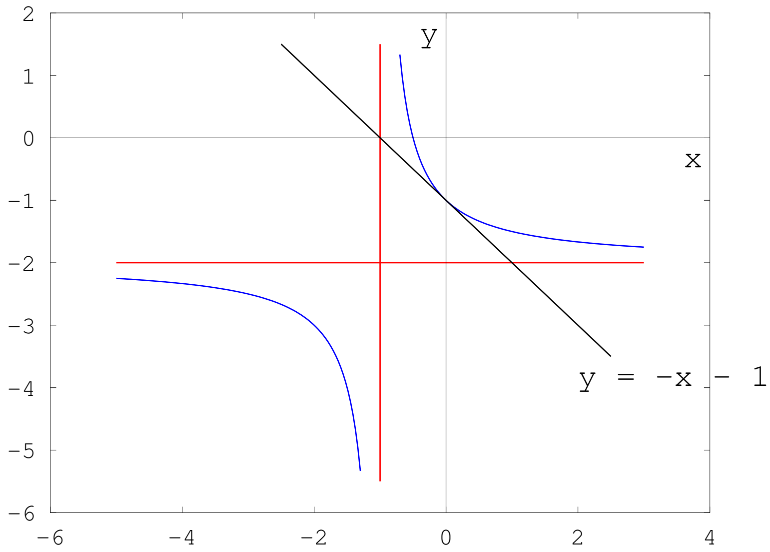
20. 11. 2013

1. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$

   (a) stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente; $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è monotona decrescente in $]-\infty, -1[\ \cup \ ]-1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   (b) determinare gli asintoti; le rette di equazioni $y = -2$ e $x = -1$ sono asintoto orizzontale e verticale (sinistro discendente e destro ascendente) rispettivamente

   (c) disegnare il grafico;



   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$. $y + 1 = f'(0)x$, ossia $y = -x - 1$

2. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso delle funzioni:

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x;$

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3);$

   $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1);$

   (b) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}, \quad x \neq 0;$

   $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2}, \quad x \neq 0;$

   $f''(x) = \dfrac{6}{x^3}, \quad x \neq 0;$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln \dfrac{1}{x} = -\sqrt{x}\ \ln x, \quad x > 0;$

   $f'(x) = \dfrac{-\ln x - 2}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0;$

   $f''(x) = \dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}, \quad x > 0;$

   (d) $f(x) = xe^{-x}.$

   $f'(x) = (1-x)e^{-x};$

   $f''(x) = (x-2)e^{-x}.$

   Dallo studio del cambiamento del segno della derivata prima si ottengono i punti di minimi (m) e i massimi (M) relativi; dallo studio del cambiamento del segno della derivata seconda si ottengono i punti di flesso (F):

(a) $M=(-1,5),\ m=(3,-27),\ F=(1,-11)$; (b) $M=(-3,-1),\ m(3,3)$;

(c) $M=(e^{-2},2e^{-1}),\ F=(1,0)$ (discendente); (d) $M=(1,e^{-1}),\ F=(2,2e^{-2})$.

I flessi di (a) e (d) sono ascendenti.

3. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_2^3 x^5\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^9 4\sqrt{x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+4x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_1^e -\frac{1}{x}\,dx$.

(a) $\displaystyle\left[\frac{1}{6}x^6\right]_2^3=\frac{665}{6}$, (b) $\displaystyle\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{15}{64}$, (c) $[-\cos x+\operatorname{sen}x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$,

(d) $\displaystyle\left[\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9=72$, (f) $[-\ln|x|]_1^e=-1$,

(e) $\displaystyle\int_0^2(6x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}})\,dx=\left[\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2=\frac{284}{15}\sqrt{2}$

4. Calcolare gli integrali indefiniti con il metodo di integrazione per parti:

(a) $\displaystyle\int x\log_{10}x\,dx$, (b) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln x\,dx$, (d) $\displaystyle\int x2^x\,dx$.

(a) $\displaystyle\frac{1}{2}x^2\log_{10}x-\frac{1}{2}\int x\log_{10}e\,dx=\frac{1}{2}x^2\log_{10}x-\frac{1}{4}x^2\log_{10}e+c$,

(b) $\displaystyle x\operatorname{sen}x-\int\operatorname{sen}x\,dx=x\operatorname{sen}x+\cos x+c$,

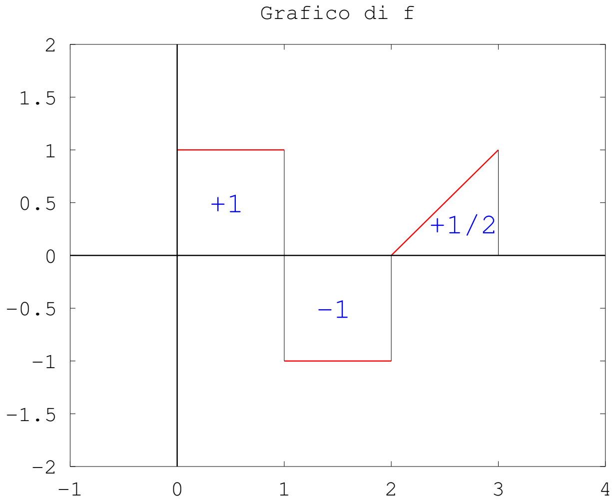
(c) $\displaystyle\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+c=\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+c$,

(d) $\displaystyle\frac{x2^x}{\ln 2}-\int\frac{2^x}{\ln 2}\,dx=\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}+c=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{(\ln 2)^2}+c$.

5. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\displaystyle\left|\int_{-4}^2 x\,dx\right|,\ \int_{-4}^2|x|\,dx$.

$$\left|\int_{-4}^2 x\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^2\right|=6<\int_{-4}^2|x|\,dx=\int_{-4}^0(-x)\,dx+\int_0^2 x\,dx=8+2$$

6. Determinare gli eventuali punti in cui la funzione $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, il cui grafico è stato riportato qui sotto, assume il suo valor medio integrale.



Nota: Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ si vede direttamente dal grafico senza fare alcun calcolo con l'espressione analitica della funzione.

Dal grafico si evince che $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Di conseguenza il valor medio integrale della f sull'intervallo $[0,3]$ è $\frac{1}{6}$ che viene assunto in $[2,3]$ dove $f(x) = x-2$. Da $x-2 = \frac{1}{6}$ si trova che la f assume il suo valor medio integrale nel punto $x = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ (come si vede anche dal grafico).