C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica 27. 11. 2013

1. Calcolare gli integrali: (a) $\displaystyle\int_{-e}^{-1} x^{-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{2}^{3}(3x-5)^{-2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_{1}^{2} xe^{-x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-5x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$, (g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx$ (sost. $u=3+\cos x$), (h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^4\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (sost. $u=1-\cos x$), (i) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (sost. $u=\sqrt{x+1}$), (k) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (per parti).

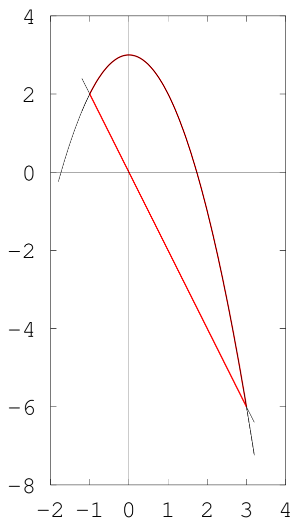
   (a) $[\ln|x|]_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1$, (b) $-\frac{1}{3}[(3x-5)^{-1}]_2^3 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-1) = \frac{1}{4}$, (c) $\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2[x^{-\frac{1}{2}}]_1^4 = -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1$, (d) per parti: $[-xe^{-x}]_1^2 + \displaystyle\int_1^2 e^{-x}\,dx = -\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-[e^{-x}]_1^2 = \frac{2}{e}-\frac{3}{e^2} = \frac{2e-3}{e^2}$, (e) $-\frac{2}{5}\left[\sqrt{1-5x}\right]_{-3}^{0} = -\frac{2}{5}(1-4) = \frac{6}{5}$, (f) per parti: $-\dfrac{1}{3}[x\cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}}+\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(3x)\,dx = 0+\frac{1}{9}[\mathrm{sen}(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$, (g) $-\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{-\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx = -\left[\ln|3+\cos x|\right]_0^{\pi} = -(\ln 2-\ln 4) = \ln 4-\ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$, (h) $du = \mathrm{sen}\,x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}\left[u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, (i) $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$; $2\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}(u^2-1)\,du = 2\left[\frac{1}{3}u^3-u\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left[(\sqrt{3}-\sqrt{3})-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{4}{3}$,

   (k) $2\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - 2\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{e}-2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{e}-4\left[\sqrt{x}\right]_1^e = 4-2\sqrt{e}$.

2. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \mathrm{sen}(\frac{x}{3})$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0,\pi]$.

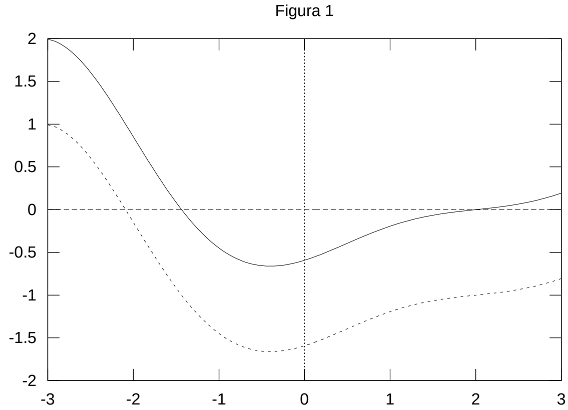
   $$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = -3\left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\pi} = -3\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{2}$$

3. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 3-x^2$ e dalla retta $y = -2x$ (disegno!).



$$\int_{-1}^{3}\left[(3-x^2)-(-2x)\right]\,dx = \frac{32}{3}$$

4. Nella figura 1 sono riportati i grafici delle funzioni f (curva continua) e g (curva tratteggiata) rispettivamente. Scrivete la funzione g in termini di f e calcolate $\int_{-3}^{+3} (f(x) - g(x))\, dx$. per $-3 \leq x \leq 3$, $g(x) = f(x) - 1$; $\int_{-3}^{+3} 1\, dx = 6$



5. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove $k = 8,05 \cdot 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

(a) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \quad \Rightarrow \quad x = x(t) = x_0 e^{-kt}$

(b) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -kt \quad \Rightarrow$

$\displaystyle t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{10^5 \cdot \ln 2}{8,05 \cdot 60^2}\ \mathrm{h} = 2,39\ \mathrm{h} = 2\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$