C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica

10. 12. 2013

1. Dato un insieme di 22 elementi, quanti sottoinsiemi di 19 elementi si possono formare? $\binom{22}{19} = \binom{22}{22-19} = \binom{22}{3} = \frac{22\cdot 21\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 11\cdot 7\cdot 20 = 1540$

2. L'isotopo iodio-131 ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni. Dopo quanti giorni la quantità di iodio-131 si riduce allo $0,4\%$ della quantità iniziale?

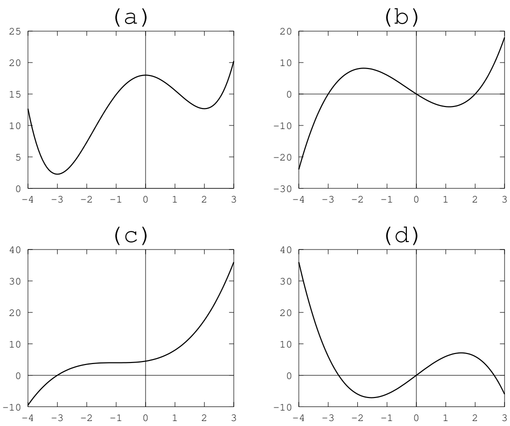
   (a) 64 , (b) 32, (c) 200, (d) 20
   $0,4\% = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \approx \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$, quindi ci vogliono circa 8 tempi di dimezzamento, cioè 64 giorni; oppure: (a) dopo $64/8 = 8$ tempi di dimezzamento la quantità si riduce a un $(\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256} \approx 0,4\%$ della quantità iniziale.

3. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}\big([\mathrm{H_3O^+}]/\mathrm{M}\big)$, dove $[\mathrm{H_3O^+}]$ indica la concentrazione di $\mathrm{H_3O^+}$. Dire se il pH di una soluzione $3,2\cdot 10^{-6}M$ di HCl è:

   (a) $2,8$, (b) $6,3$, (c) $5,5$, (d) $6,5$
   $-\log_{10}(3,2\cdot 10^{-6}) = -(\log_{10} 3,2 + \log_{10} 10^{-6}) = 6 - \log_{10} 3,2 < 6$ poiché $\log_{10} 3,2 > 0$, quindi (b) e (d) sono da escludere; (a) è da escludere siccome $\log_{10} 3,2 < 1$.

4. Determinare quali delle Figure 1(b), (c), (d) può essere il grafico della derivata della funzione il cui grafico è rappresentato nella Figura 1(a):
   (b), (c), (d)

   Figura 1

   Dove la funzione (a) ha minimi o massimi locali la sua derivata deve annullarsi, ciò esclude (c); tra il primo minimo locale e il massimo locale la funzione (a) cresce e vi la sua derivata deve essere positiva come accade solo per la (b); quindi solo la (b) può essere la derivata della (a).

5. Stabilire il dominio della funzione $f(t) = \ln\left(\sqrt{t}\right)$ e calcolare $f'(t)$ e $\int f(t)\,dt$ (sostituzione $x = \sqrt{t}$ e integrazione per parti).
   dominio: $t > 0$, $f(t) = \frac{1}{2}\ln(t)$, $f'(t) = \frac{1}{2t}$,
   $\int f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int \ln(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t\ln(t) - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{2}t(\ln t - 1) + c$, oppure: con la sostituzione $x = \sqrt{t}$, cioè $t = x^2$ si ottiene $dt = 2xdx$ e di conseguenza $f(t) = \ln\left(\sqrt{t}\right) = \int 2x\ln x\,dx = x^2\ln x - \int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + c = t\ln(\sqrt{t}) - \frac{1}{2}t + c = t\left(\ln(\sqrt{t}) - \frac{1}{2}\right) + c$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

   (a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan ($\mathbf{x}$ denota il vettore colonna delle incognite x_1, x_2, x_3);

   (b) calcolare $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$;

   (c) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.

(a),(b) $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R2 - 3R1 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R3 + R2 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R2/(-1) \rightarrow \\ R3/3 \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 10 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \quad R2 + R3 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{22}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \quad R1 - R2 \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{22}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{22}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}$$

(c) $\mathbf{AB}$ non è definito; $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(1-y) \\ y(0) = (e+1)^{-1} \end{cases}$$

   e trovare gli intervalli di monotonia, il punto di flesso e gli asintoti della soluzione trovata.

   Le soluzioni $y = 0$ e $y = 1$ dell'equazione differenziale non soddisfano la condizione iniziale. Quindi possiamo assumere che $y \neq 0$ e $y \neq 1$ e otteniamo: $\displaystyle\int_{(e+1)^{-1}}^{y} \frac{dy}{y(y-1)} = \int_0^x dx$, e usando $\dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$,

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| - \ln\left(\frac{\frac{1}{e+1}}{1-\frac{1}{e+1}}\right) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) + 1 = x \Rightarrow \frac{y}{1-y} = e^{x-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1-y}{y} = e^{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{1+e^{1-x}} = \frac{e^x}{e^x+e},\ x \in \mathbb{R};$$

ovviamente $0 < y < 1$, quindi $\frac{dy}{dx} = y(1-y) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, cioè y è monotona crescente in $\mathbb{R}$; oppure $y = (1+e^{1-x})^{-1}$, $y' = (1+e^{1-x})^{-2}e^{1-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$y'' = 2(1+e^{1-x})^{-3}e^{2-2x} - (1+e^{1-x})^{-2}e^{1-x} = (1+e^{1-x})^{-3}e^{1-x}(2e^{1-x}-1-e^{1-x})$, ne segue che $y'' > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > 1 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Rightarrow$ flesso discendente $(1, y(1)) = (1, \frac{1}{2})$

$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$, quindi le rette di equazione $y = 0$ e $y = 1$ sono asintoti orizzontali;