C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica
Matematica 17. 12. 2013

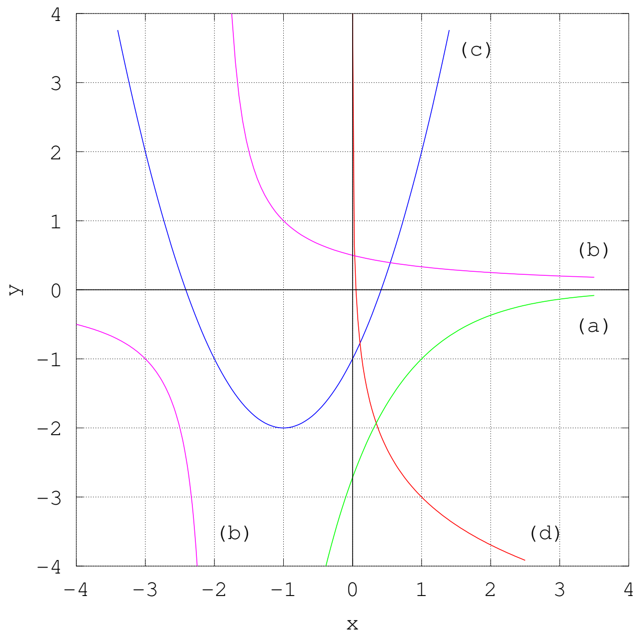
1. Quante sono le possibili funzioni $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$? Quante di tali funzioni sono iniettive? Ci sono $3^3 = 27$ funzioni (le immagini dei tre elementi possono anche coincidere: disposizioni con ripetizioni) e $3! = 6$ funzioni iniettive (le immagini dei tre elementi devono essere distinte: permutazioni).

2. Nella fase esponenziale della crescita il numero N di cellule in una coltura batterica di *Escherichia coli*, in condizioni nutrizionali poveri, si raddoppia ogni 40-50 minuti. Quante ore ci vogliono affinché vi siano presenti $10^3\,N_0$ cellule? (a) $2,5$-5 ore, (b) 7-8 ore, (c) 70-80 ore, (d) 40-50 ore, (e) 667-833 ore. $10^3 \approx 2^{10}$; quindi ci vogliono circa 10 tempi di raddoppiamento, cioè 400-500 minuti, ossia (b) 7-8 ore.

3. Quanto vale $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{1}{e}}\right)$? (a) 5 , (b) $-\sqrt[5]{e}$, (c) $\frac{1}{e}$, (d) $\frac{1}{5}$, (e) nessuno dei precedenti
$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{1}{e}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}$, (e) nessuno dei precedenti

4. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

	(A)	$y = (x-1)^2 - 2$
(c)	(B)	$y = (x+1)^2 - 2$
	(C)	$y = e^{x-1}$
	(D)	$y = -(x-1)^2 + 2$
(a)	(E)	$y = -e^{-x+1}$
	(F)	$y = -e^{x-1}$
	(G)	$y = 3 - \ln x$
	(H)	$y = (\ln x) - 3$
(d)	(I)	$y = -3 + \ln\frac{1}{x}$
(b)	(L)	$y = \frac{1}{x+2}$
	(M)	$y = \frac{1}{x-2}$
	(N)	$y = \frac{1}{2-x}$.



5. Stabilire il dominio della funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ e calcolare $f'(x)$ e $\int_0^3 f(x)\,dx$ (integrazione per sostituzione: $t = \sqrt{x+1}$). $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$

$$\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}},\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2t},\ dx = 2t\,dt,\ \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}2t\,dt$$

$$= 2\int_1^2 (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 + 1\right) = \frac{8}{3}$$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

   (a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan ($\mathbf{x}$ denota il vettore colonna delle incognite x_1, x_2, x_3);

   (b) calcolare $\mathbf{A}^{-1}$;

   (c) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$, dove $\mathbf{b}^T$ è la trasposta di $\mathbf{b}$.

(a),(b) $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R2+R1 \to \\ R3-R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

scambiare $R2$ con $R3 \to$ $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $R3/2 \to$

$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R1-R3 \to \\ R2-R3 \to \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{b}^T\mathbf{b} = 20$, $\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

7. Nella reazione di decomposizione

$$2\,N_2O_{5\,(g)} \longrightarrow 4NO_{2\,(g)} + O_{2\,(g)}$$

   la concentrazione x di N_2O_5 dipende dal tempo t, dalla concentrazione iniziale x_0 di N_2O_5 e dalla costante cinetica k che a sua volta dipende dalla temperatura ed energia di attivazione della reazione. Più precisamente, $x = x(t)$ è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,. \end{cases} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k \int_0^t 1\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \Rightarrow$$

(a) $x = x(t) = x_0 e^{-kt}$

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

   (b) Si calcoli la concentrazione di N_2O_5 che rimane dopo 600 s dall'inizio della decomposizione del composto a 65°, quando la concentrazione iniziale era di $0,040$ mol $\cdot$ dm^{-3}. La costante cinetica delle reazione risulta $k = 5,2 \cdot 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$. $x(600\,\mathrm{s}) = 0,040e^{-3,12}$ mol $\cdot$ dm^{-3} $= 0,0018$ mol $\cdot$ dm^{-3}

   (c) Dopo quanti secondi la concentrazione di N_2O_5 sarà dimezzata, cioè uguale a $0,020\,\mathrm{mol} \cdot \mathrm{dm}^{-3}$? $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kt} \Rightarrow 2 = e^{kt} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{k} = 133\,\mathrm{s}$