$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{?}{3} & \frac{?}{3} & \frac{?}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{?}{?} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{x-1}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{e^{x-1} + (x+1)e^{x-1} = (x+2)e^{x-1}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{(x+1)e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}dx = xe^{x-1}\Big|_0^1 = 1}$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} =$ non è definito, $\mathbf{BA} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$.

7. Nella reazione chimica

$$2\,NO_2(g) \longrightarrow 2\,NO\ (g) + O_2\ (g)$$

la concentrazione x di NO_2 in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

$$-\int_{x_0}^{x} x^{-2}dx = k\int_0^t dt, \quad \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} = kt$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NO_2. A una temperatura di 300 °C si ha $k = 0,54\,M^{-1}s^{-1}$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = kt$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + kt$$

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) = \boxed{\dfrac{x_0}{1 + x_0kt} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} + kt}}$

(b) Si calcoli la concentrazione di NO_2 dopo 4 minuti dall'inizio della reazione a 300°C, quando la concentrazione iniziale era di $4,0\cdot10^{-3}$M. $\boxed{3\cdot 10^{-3} M}$

$$\frac{1}{250 + 0{,}54\cdot 4\cdot 60}\,M = \frac{1}{129{,}6 + 250}\,M = \frac{1}{380}\,M \approx 3\cdot10^{-3}M$$

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NO_2 sarà dimezzata? $\boxed{\text{8 minuti}}$ Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☒ No: ☐

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{x_0}{1 + x_0kt_{1/2}} \Rightarrow 2 = 1 + x_0kt_{1/2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{x_0k}} \approx \frac{10^3}{4\cdot 0{,}54}\,s$$

$$= \frac{10^3}{2{,}16}\,s \approx 480\,s = 8\ min.$$

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 14/01/2014

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quanti sottoinsiemi di A costituiti da tre elementi distinti si possono formare? $\boxed{\binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 56}$

   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{2^8 = 256}$

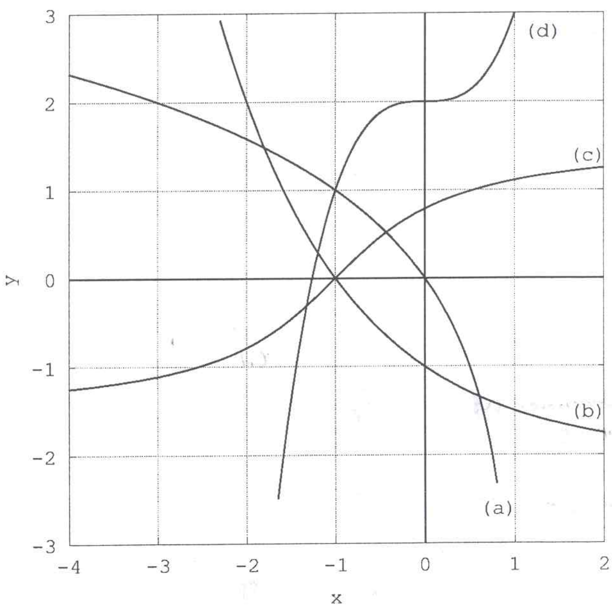
2. Dopo 39 ore dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al $12,5\%$ del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) $4,9$, (b) 7, $\cancel{(c)}$ 13, (d) $19,5$ ore

3. Quale soluzione ha l'equazione $\log_{10}(2-x) = -1$?

   (a) $-1 + \log_{10} 2$, (b) $10^{-1+\log_{10} 2}$, $\cancel{(c)}$ $1,9$, (d) 12

4. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

	(A)	$y = 2 - x^3$
(d)	(B)	$y = x^3 + 2$
	(C)	$y = \arctan(1-x)$
	(D)	$y = (x+2)^3$
	(E)	$y = \mathrm{sen}(x+1)$
(c)	(F)	$y = \arctan(x+1)$
(a)	(G)	$y = \log_2(1-x)$
	(H)	$y = 1 + \log_2(-x)$
	(I)	$y = \log_2(-x+1)$
	(L)	$y = 2^{x+1} - 1$
	(M)	$y = 2^{-x+1} - 4$
(b)	(N)	$y = 2^{-x} - 2.$



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{x+1}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$f'(x) =$ $\boxed{e^{x+1} + (x+1)e^{x+1} = (x+2)e^{x+1}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx =$ $\boxed{(x+1)e^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = xe^{x+1}\Big|_0^1 = e^2}$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{BA} =$ $\boxed{\text{non è definito}}$.

7. Nella reazione chimica

$$2\,NOBr\,(g) \longrightarrow 2\,NO\,(g) + Br_2\,(g)$$

la concentrazione x di NOBr in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \qquad -\int_{x_0}^{x} x^{-2}dx = k\int_0^t dt,\ \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} = kt$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NOBr. A una temperatura di 10 °C si ha $k = 0,810\,\mathrm{M}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = kt$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + kt$$

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) =$ $\boxed{\dfrac{x_0}{1 + x_0 kt} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} + kt}}$

(b) Si calcoli la concentrazione di NOBr dopo 15 minuti dall'inizio della reazione a 10°C, quando la concentrazione iniziale era di $4,0 \cdot 10^{-3}$M.

$\boxed{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{M}}$ $\quad \dfrac{1}{250 + 0,81 \cdot 15 \cdot 60}\,\mathrm{M} = \dfrac{1}{250 + 0,81 \cdot 900}\,\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{M}}{250 + 729}$

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NOBr sarà dimezzata? $\approx \dfrac{1}{979}\,\mathrm{M}$

$\boxed{5 \text{ minuti}}$ Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☒ No: ☐ $\quad \approx 10^{-3}\,\mathrm{M}$

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{x_0}{1 + x_0 k t_{1/2}} \Rightarrow 2 = 1 + x_0 k t_{1/2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{x_0 k}} = \frac{10^3}{4 \cdot 0,81}\,\mathrm{s}$$
$$\approx 300\,\mathrm{s} = 5 \text{ min.}$$

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 14/01/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quanti sottoinsiemi di A costituiti da tre elementi distinti si possono formare? $\boxed{\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35}$

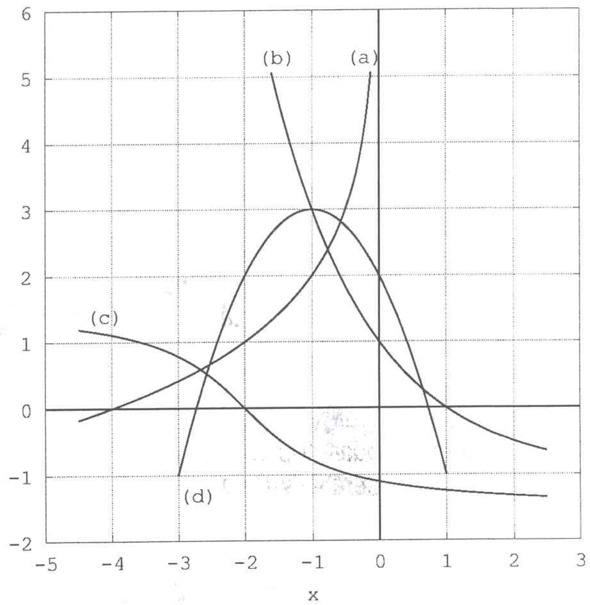
   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{2^7 = 128}$

2. Dopo 12 giorni dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al 12,5% del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) 1,5, (b) 2, (c) 3,25, (d) 4 giorni

3. Quale soluzione ha l'equazione $\log_{10}(2 - x) = 2$?
   (a) -98, (b) $-2 + \log_{10} 2$, (c) $10^{2+\log_{10} 2}$, (d) 102

4. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

(d) (A) $y = -(x+1)^2 + 3$
(B) $y = -(1-x)^2 - 1$
(C) $y = \arctan(2 - x)$
(D) $y = (x+1)^2 + 3$
(E) $y = \text{sen}(2 - x)$
(c) (F) $y = -\arctan(x + 2)$
(G) $y = 1 - \log_2(-x)$
(a) (H) $y = 2 - \log_2(-x)$
(I) $y = 2 + \log_2(-x)$
(L) $y = 2^{x+1} - 1$
(M) $y = 3 - 2^{1-x}$
(b) (N) $y = 2^{1-x} - 1$.



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} \ldots \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x+1}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{e^{x+1} + xe^{x+1} = (1+x)e^{x+1}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{xe^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = (x-1)e^{x+1}\Big|_0^1 = e}$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} =$ $\boxed{\text{non è definito}}$, $\mathbf{BA} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}}$.

7. Nella reazione chimica

$$2\,NO_2(g) \longrightarrow 2\,NO\ (g) + O_2\ (g)$$

la concentrazione x di NO_2 in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \quad -\int_{x_0}^{x} x^{-2}dx = k\int_0^t dt,\ \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} = kt$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NO_2. A una temperatura di 300 °C si ha $k = 0{,}54\,\mathrm{M}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = kt$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + kt$$

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) = \boxed{\dfrac{x_0}{1 + x_0 kt} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} + kt}}$

(b) Si calcoli la concentrazione di NO_2 dopo 4 minuti dall'inizio della reazione a 300°C, quando la concentrazione iniziale era di $4{,}0 \cdot 10^{-3}$M. $\boxed{3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{M}}$

$$\frac{1}{250 + 0{,}54 \cdot 4 \cdot 60}\ \mathrm{M} = \frac{1}{129{,}6 + 250}\ \mathrm{M} = \frac{1}{380}\ \mathrm{M} \approx 3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{M}$$

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NO_2 sarà dimezzata?

$\boxed{\text{8 minuti}}$ Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☒ No: ☐

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{x_0}{1 + x_0 k t_{1/2}} \Rightarrow 2 = 1 + x_0 k t_{1/2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{x_0 k}} = \frac{10^3}{4 \cdot 0{,}54}\ \mathrm{s}$$
$$= \frac{10^3}{2{,}16}\ \mathrm{s} \approx 480\ \mathrm{s} = 8\ \mathrm{min.}$$

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 14/01/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quanti sottoinsiemi di A costituiti da due elementi distinti si possono formare? $\boxed{\binom{10}{2} = 45}$

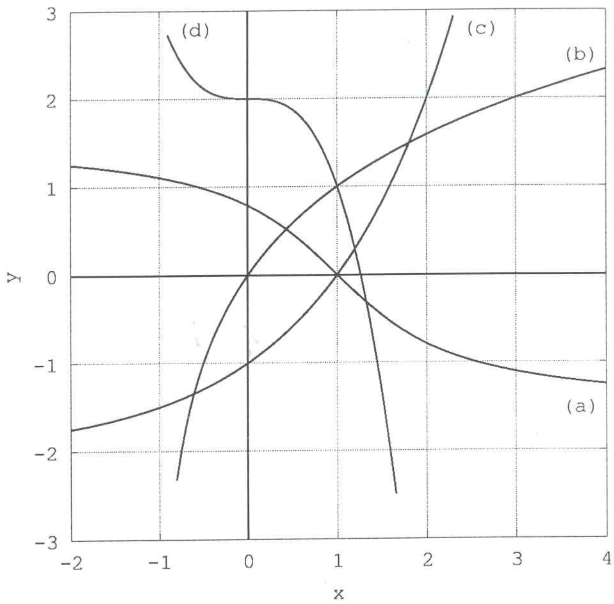
   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{2^{10} = 1024}$

2. Dopo 24 giorni dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al $12,5\%$ del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) 3, (b) $10,5$, ~~(c)~~ 8, (d) 12 giorni

3. Quale soluzione ha l'equazione $\log_{10}(x-2) = -1$?
   (a) 2 , ~~(b)~~ $2,1$, (c) $2 + \log_{10}(-1)$, (d) $10^{-1+\log_{10} 2}$

4. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

	(A)	$y = x^3 + 2$
	(B)	$y = -(x-2)^3$
(a)	(C)	$y = -\arctan(x-1)$
(d)	(D)	$y = 2 - x^3$
	(E)	$y = -\operatorname{sen}(x-1)$
	(F)	$y = \arctan(x+1)$
	(G)	$y = 1 + \log_2 x$
(b)	(H)	$y = \log_2(x+1)$
	(I)	$y = \log_2(x-1)$
(c)	(L)	$y = 2^x - 2$
	(M)	$y = 2^{x+1} - 4$
	(N)	$y = 2^{-x+1} - 1$.



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

5. Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^{x-1}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} = xe^{x-1}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{(x-1)e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}dx = (x-2)e^{x-1}\Big|_0^1 = -1+\frac{2}{e}}$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{BA} =$ non è definito.

7. Nella reazione chimica

$$2\,\mathrm{NOBr}\ (g) \longrightarrow 2\,\mathrm{NO}\ (g) + \mathrm{Br}_2\ (g)$$

la concentrazione x di NOBr in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \qquad -\int_{x_0}^{x} x^{-2}dx = k\int_0^t dt,\ \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} = kt$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NOBr. A una temperatura di 10 °C si ha $k = 0,810\,\mathrm{M}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = kt,\ \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + kt$$

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) = \boxed{\dfrac{x_0}{1+x_0kt} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0}+kt}}$

(b) Si calcoli la concentrazione di NOBr dopo 15 minuti dall'inizio della reazione a 10°C, quando la concentrazione iniziale era di $4,0\cdot10^{-3}$M.

$\boxed{1\cdot10^{-3}\,\mathrm{M}}$ $\quad \dfrac{1}{250+0,81\cdot15\cdot60}\mathrm{M} = \dfrac{1}{250+0,81\cdot900}\mathrm{M} = \dfrac{1\,\mathrm{M}}{250+729} = \dfrac{1}{979}\mathrm{M} \approx 10^{-3}\mathrm{M}$

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NOBr sarà dimezzata?

$\boxed{5 \text{ minuti}}$ Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☒ No: ☐

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{x_0}{1+x_0kt_{1/2}} \Rightarrow 2 = 1+x_0kt_{1/2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{x_0k}} = \frac{10^3}{4\cdot0,81}\,\mathrm{s}$$

$$\approx 300\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{min.}$$

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 14/01/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quanti sottoinsiemi di A costituiti da tre elementi distinti si possono formare? $\boxed{\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10}$

   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{2^5 = 32}$

2. Dopo 42 giorni dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al 12,5% del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) 10,5, ~~(b)~~ 14, (c) 5,25, (d) 21 giorni

3. Quale soluzione ha l'equazione $\log_{10}(x - 2) = 2$?
   (a) 4 , (b) $2 + \log_{10} 2$, (c) $10^{2+\log_{10} 2}$, ~~(d)~~ 102

4. In figura sono tracciati 4 grafici (a), (b), (c) e (d). Individuate le funzioni corrispondenti ai 4 grafici tra le seguenti:

   (A) $y = (x-1)^2 + 3$
   (B) $y = -(x+1)^2 - 1$
   (c) (C) $y = \arctan(x - 2)$
   (a) (D) $y = -(x-1)^2 + 3$
   (E) $y = \operatorname{sen}(x + 2)$
   (F) $y = \arctan(x + 2)$
   (G) $y = 1 - \log_2 x$
   (H) $y = 2 + \log_2 x$
   (b) (I) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$
   (L) $y = 2^{-x+1} - 1$
   (d) (M) $y = 2^{x+1} - 1$
   (N) $y = 3 - 2^{x+1}$.