C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 13/02/2014

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti diversi risultati $CCCCCCC$, $CCCCCCT$, $CCCCCTC$, ... si possono avere su 7 lanci di una moneta? (C = croce, T = testa) $\boxed{2^7 = 128}$

   Quanti di tali risultati contengono T esattamente 4 volte? $\boxed{\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35}$

2. Un liquido viene fatto passare attraverso un filtro che consente di eliminare il 40 % delle impurità presenti nel liquido. Successivamente il liquido (già filtrato una prima volta) viene fatto passare attraverso un secondo filtro dello stesso tipo, e infine attraverso un terzo filtro, ancora del medesimo tipo. Calcolare la percentuale complessiva delle impurità eliminate con i tre filtraggi.

   $\boxed{1 - 0,6^3 = 78,4\,\%}$

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{4}{3x}, \quad x \neq 0,$

   (a) trovare i minimi e i massimi relativi:

   $\boxed{x_{\min} = \dfrac{4}{3}, \qquad y_{\min} = \dfrac{5}{2}}$ $\boxed{x_{\max} = -\dfrac{4}{3}, \qquad y_{\max} = -\dfrac{3}{2}}$

   (b) scrivere le equazioni degli asintoti:

   $\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}x}$

   (c) disegnare il grafico di f e gli asintoti (nel sistema di riferimento sulla pagina successiva);

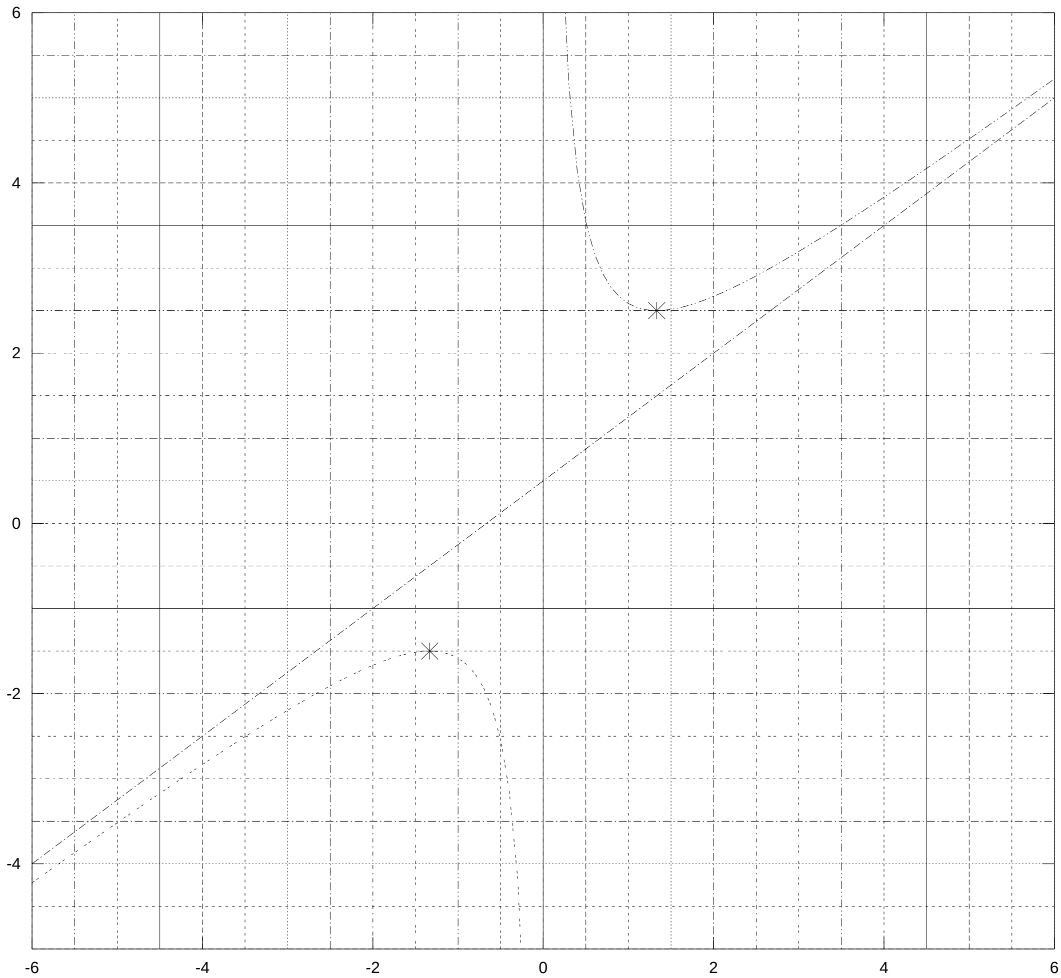
   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(2, \frac{8}{3})$:

   $\boxed{y = \dfrac{8}{3} + \dfrac{5}{12}(x-2) = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{11}{6}}$

4. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{sen}(2x)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{\operatorname{sen}(2x) + 2x\cos(2x)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \boxed{\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}}$$



5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 1; & -1; & -2 \end{bmatrix}}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$.

6. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = \frac{3}{2}$, $\boxed{y(x) = \frac{3}{1+e^{3x}}}$

(b) $y(0) = 3$, $\boxed{y(x) = 3}$

(c) $y(0) = 6$. $\boxed{y(x) = \frac{6}{2-e^{3x}}}$

Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\dfrac{1}{y(y-3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{y-3} - \dfrac{1}{y}\right)$.

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 13/02/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti diversi risultati $CCCCCC$, $CCCCCT$, $CCCCTC$, … si possono avere su 6 lanci di una moneta? (C = croce, T = testa) $\boxed{2^6 = 64}$
   Quanti di tali risultati contengono T esattamente 3 volte?

2. Un liquido viene fatto passare attraverso un filtro che consente di eliminare il 20% delle impurità presenti nel liquido. Successivamente il liquido (già filtrato una prima volta) viene fatto passare attraverso un secondo filtro dello stesso tipo, e infine attraverso un terzo filtro, ancora del medesimo tipo. Calcolare la percentuale complessiva delle impurità eliminate con i tre filtraggi.
   $\boxed{1 - 0,8^3 = 48,8\,\%}$

3. Se $\log_2(4t) = 4$, allora t è (a) 1, (b) 2, $\boxed{\text{(c) } 4}$, (d) 8, (e) 16.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{4}{3x}$, $x \neq 0$,

   (a) trovare i minimi e i massimi relativi:
   $\boxed{x_{\min} = -\frac{4}{3}, \quad y_{\min} = \frac{5}{2}}$ $\boxed{x_{\max} = \frac{4}{3}, \quad y_{\max} = -\frac{3}{2}}$

   (b) scrivere le equazioni degli asintoti:
   $\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x}$

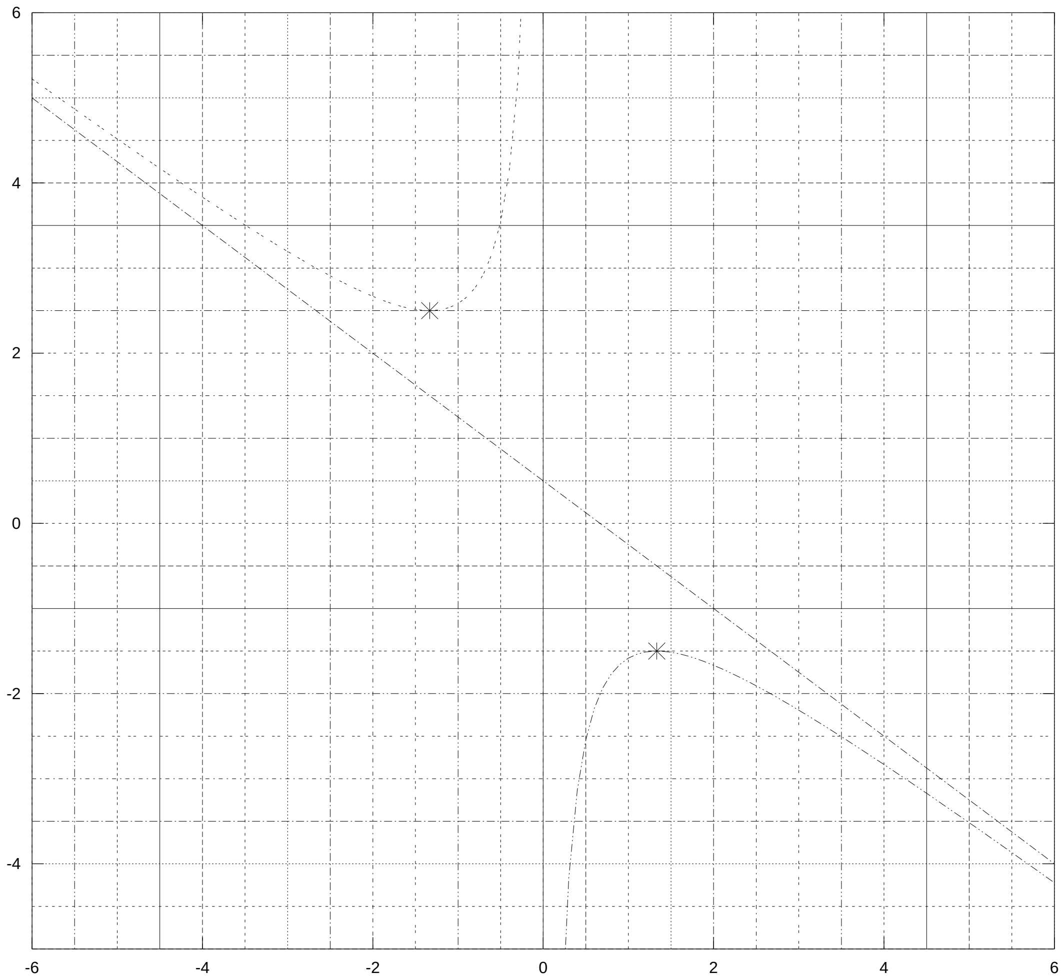
   (c) disegnare il grafico di f e gli asintoti (nel sistema di riferimento sulla pagina successiva);

   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(2, -\frac{5}{3})$:
   $$\boxed{y = -\frac{5}{3} - \frac{5}{12}(x-2) = -\frac{5}{12}x - \frac{5}{6}}$$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(3x)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$:

$$f'(x) = \boxed{\cos(3x) - 3x\,\mathrm{sen}(3x)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \boxed{\left[\frac{1}{3}x\,\mathrm{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{9}\left[\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{9}}$$



6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 1; & 1; & 1 \end{bmatrix}}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$.

7. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y+2)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = -2$, $\boxed{y(x) = -2}$

(b) $y(0) = -1$, $\boxed{y(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}}$

(c) $y(0) = 2$. $\boxed{y(x) = \frac{2}{2e^{-2x}-1}}$

Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\displaystyle \frac{1}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)$.

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 13/02/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti diversi risultati $CCCCCCCC$, $CCCCCCCT$, $CCCCCCTC$, ... si possono avere su 8 lanci di una moneta? (C = croce, T = testa) $\boxed{2^8 = 256}$

   Quanti di tali risultati contengono T esattamente 5 volte? $\boxed{\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56}$

2. Un liquido viene fatto passare attraverso un filtro che consente di eliminare il 30% delle impurità presenti nel liquido. Successivamente il liquido (già filtrato una prima volta) viene fatto passare attraverso un secondo filtro dello stesso tipo, e infine attraverso un terzo filtro, ancora del medesimo tipo. Calcolare la percentuale complessiva delle impurità eliminate con i tre filtraggi.

   $\boxed{1 - 0,7^3 = 65,7\,\%}$

3. Se $\log_2(2t) = 2$, allora t è (a) 0, (b) 0,25, (c) 0,5, (d) 1, $\boxed{\text{(e) } 2}$.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2x}$, $x \neq 0$,

   (a) trovare i minimi e i massimi relativi:

   $\boxed{x_{\min} = \dfrac{3}{2}, \qquad y_{\min} = \dfrac{5}{2}}$ $\boxed{x_{\max} = -\dfrac{3}{2}, \qquad y_{\max} = -\dfrac{3}{2}}$

   (b) scrivere le equazioni degli asintoti:

   $\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x}$

   (c) disegnare il grafico di f e gli asintoti (nel sistema di riferimento sulla pagina successiva);

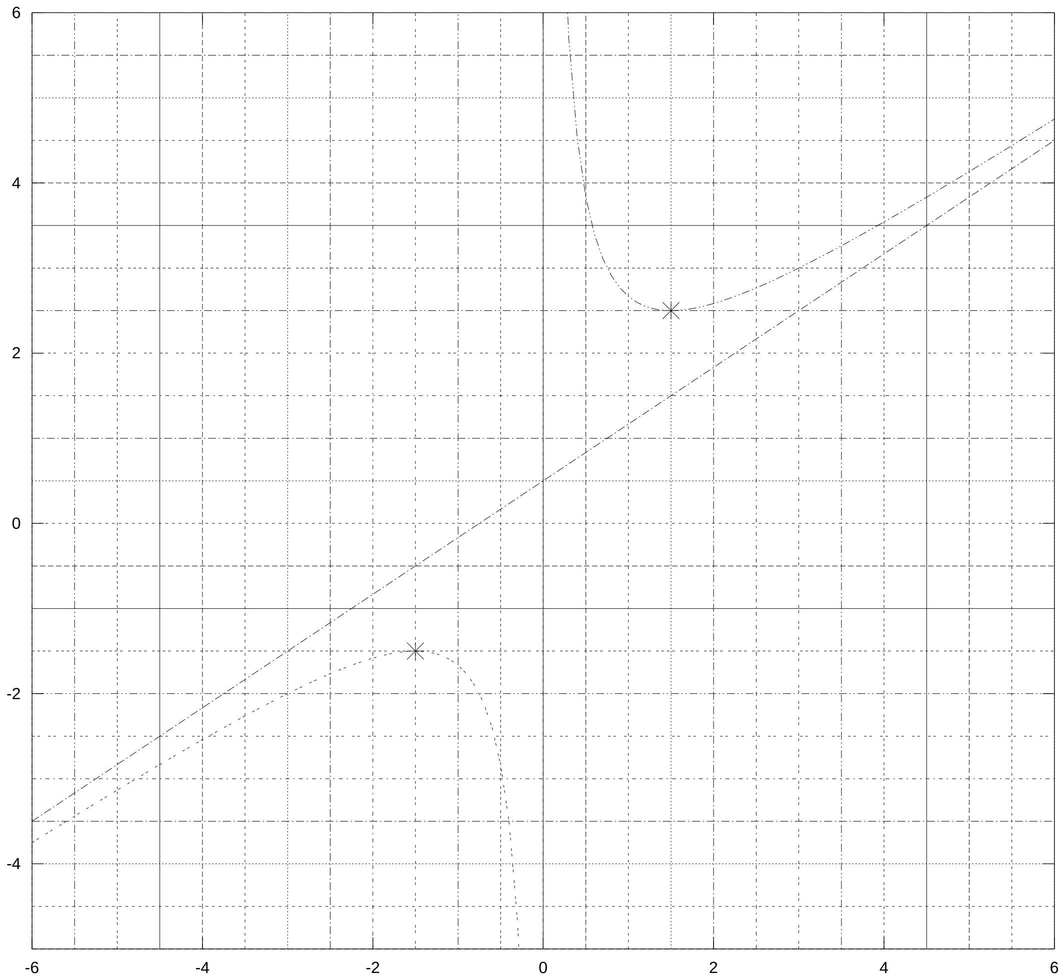
   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, \frac{8}{3})$:

   $\boxed{y = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{6}(x-1) = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{7}{2}}$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{sen}(3x)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$:

$$f'(x) = \boxed{\operatorname{sen}(3x) + 3x\cos(3x)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \boxed{\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x)\,dx = \frac{\pi}{9} + \left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9}}$$



6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 1; & 0; & 2 \end{bmatrix}}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$.

7. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y+3)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = -3$, $\boxed{y(x) = -3}$

(b) $y(0) = -\frac{3}{2}$, $\boxed{y(x) = -\dfrac{3}{1+e^{-3x}}}$

(c) $y(0) = 3$. $\boxed{y(x) = \dfrac{3}{2e^{-3x}-1}}$

Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\dfrac{1}{y(y+3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+3}\right)$.

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 13/02/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti diversi risultati $CCCCCCCCC$, $CCCCCCCCT$, $CCCCCCCTC, \ldots$ si possono avere su 9 lanci di una moneta? (C = croce, T = testa) $\boxed{2^9 = 512}$

   Quanti di tali risultati contengono T esattamente 7 volte? $\boxed{\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36}$

2. Un liquido viene fatto passare attraverso un filtro che consente di eliminare il 10% delle impurità presenti nel liquido. Successivamente il liquido (già filtrato una prima volta) viene fatto passare attraverso un secondo filtro dello stesso tipo, e infine attraverso un terzo filtro, ancora del medesimo tipo. Calcolare la percentuale complessiva delle impurità eliminate con i tre filtraggi. $\boxed{1 - 0,9^3 = 27,1\,\%}$

3. Se $\log_2(10t) = 10$, allora t è (a) 1, (b) 2, (c) 10, $\boxed{\text{(d) } 102,4}$, (e) 1024.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{2x}$, $\quad x \neq 0$,

   (a) trovare i minimi e i massimi relativi:

   $\boxed{x_{\min} = -\dfrac{3}{2}, \qquad y_{\min} = \dfrac{5}{2}}$ $\boxed{x_{\max} = \dfrac{3}{2}, \qquad y_{\max} = -\dfrac{3}{2}}$

   (b) scrivere le equazioni degli asintoti:

   $\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}x}$

   (c) disegnare il grafico di f e gli asintoti (nel sistema di riferimento sulla pagina successiva);

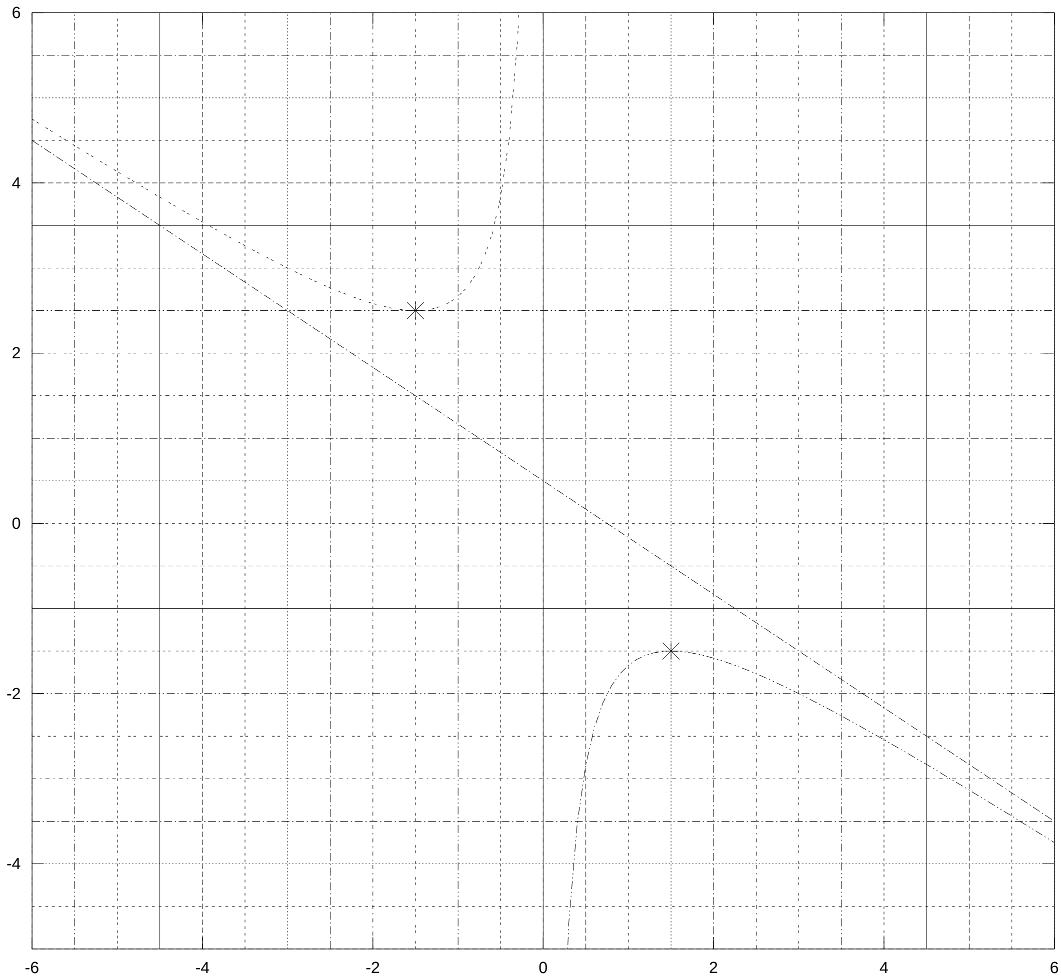
   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, -\frac{5}{3})$:

   $\boxed{y = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{6}(x-1) = \dfrac{5}{6}x - \dfrac{5}{2}}$

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos(2x)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{\cos(2x) - 2x\,\mathrm{sen}(2x)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \boxed{\left[\frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{4}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}}$$



6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -1; & 1; & -1 \end{bmatrix}}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$.

7. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-2)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = 1$, $\boxed{y(x) = \dfrac{2}{1+e^{2x}}}$

(b) $y(0) = 2$, $\boxed{y(x) = 2}$

(c) $y(0) = 4$. $\boxed{y(x) = \dfrac{4}{2-e^{2x}}}$

Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\dfrac{1}{y(y-2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y}\right)$.