C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 23/04/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Qual è il coefficiente di a^5b^2 nello sviluppo della potenza $(a+b)^7$? $\boxed{\binom{7}{2} = 21}$

2. Supponiamo che una coltura batterica di *Escherichia coli* si trovi nella fase esponenziale della sua crescita. Si è osservato che la coltura si è raddoppiata in 20 minuti. Allora in 5 minuti la coltura è cresciuta grosso modo del
(a) 20%, (b) 25%, (c) 50%, (d) 100%.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\log_{10}(x^2 + 6x + 93) = 2$.
$$\boxed{x^2+6x+93 = 10^2 \Rightarrow x_1 = -7,\ x_2 = 1}$$

4. Dite qual è la funzione inversa della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. $\boxed{f^{-1}(x) = x^2,\ x \geq 0}$

   Disegnate i grafici delle funzioni $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nel sistema di riferimento della figura 1.

   Disegnate i grafici delle funzioni $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ in scala logaritmica nel sistema di riferimento della figura 2.

Figura 1

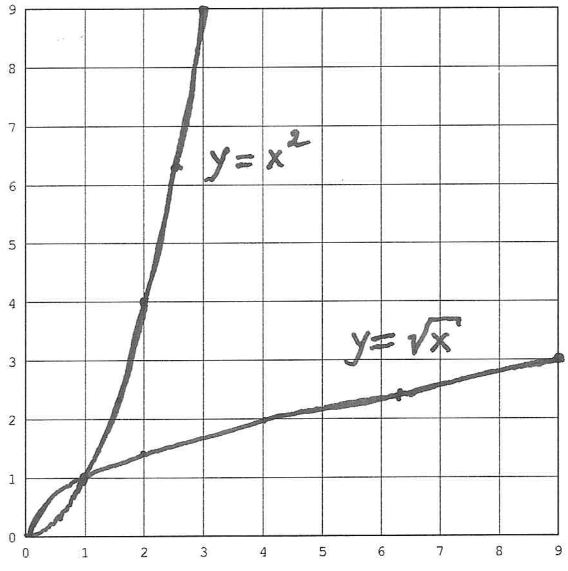
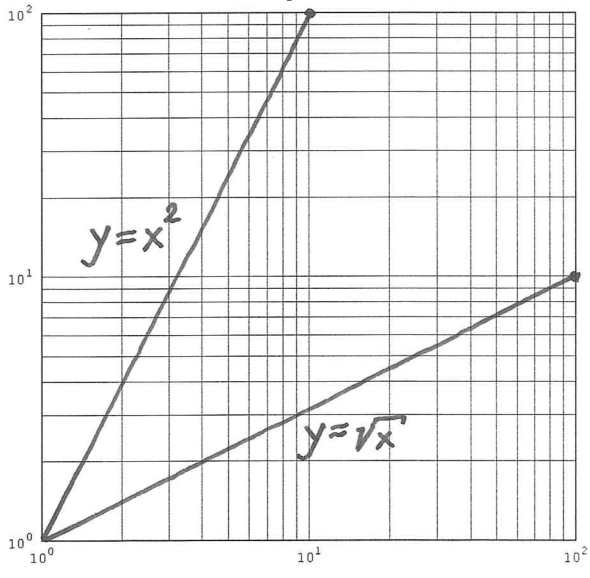


Figura 2



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ -1&2&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$R2+R1$, $R3-R1$ $\longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 0&5&2&1&1&0\\ 0&-2&-1&-1&0&1 \end{array}\right]$$

$R3+\frac{2}{5}R2 \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 0&5&2&1&1&0\\ 0&0&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&1 \end{array}\right]$$

$R2/5,\ -5R3 \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\ 0&0&1&3&-2&-5 \end{array}\right]$$

$R2-\frac{2}{5}R3,\ R1-R3 \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&0&-2&2&5\\ 0&1&0&-1&1&2\\ 0&0&1&3&-2&-5 \end{array}\right]$$

$R1-3R2 \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&-1\\ 0&1&0&-1&1&2\\ 0&0&1&3&-2&-5 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix} = \vec{x}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\3&-2&-5\end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

5. Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^{2x}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$$f'(x) = \boxed{(x-1)'e^{2x}+(x-1)(e^{2x})' = e^{2x}+2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{\left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3-e^2)}$$

6. Date le matrici $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&1\\-1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&5\\1&-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix}},\qquad \text{(b) } \mathbf{A}^{-1}=\boxed{\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\3&-2&-5\end{bmatrix}},$$

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB}=\boxed{\begin{bmatrix}-6&16\\-2&5\\-3&8\end{bmatrix}}$, $\mathbf{BA}=$ non è definito.

7. La concentrazione $C=C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy (omettendo le unità di misura):

$$\begin{cases}\dfrac{dC}{dt}=2(30-C)\\ C(0)=10\,.\end{cases} \qquad \int_{10}^{C}\frac{dC}{30-C}=2\int_0^t dt \Rightarrow \left[-\ln|30-C|\right]_{10}^{C}=2t$$

$\left[\ln|30-C|\right]_{10}^{C}=-2t$, $|30-C|=30-C$ poiché $C\leq 30$

$\dfrac{30-C}{30-10}=e^{-2t}$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$$\boxed{C(t) = 30-20e^{-2t}}$$

(b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t\to+\infty$. $\boxed{\lim_{t\to+\infty} C(t) = 30}$

(c) Usando la risposta di (a) e il valore $\ln(2)\approx 0,69$, si determini t in modo tale che $C(t)=20$. $\boxed{t=\frac{1}{2}\ln 2\approx 0,345}$

$$20 = 30-20e^{-2t}$$

$$\Rightarrow e^{-2t}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2t=\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}\ln 2$$

C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 23/04/2014

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Qual è il coefficiente di a^3b^3 nello sviluppo della potenza $(a+b)^6$? $\boxed{\binom{6}{3}=20}$

2. Supponiamo che una coltura batterica di *Escherichia coli* si trovi nella fase esponenziale della sua crescita. Si è osservato che la coltura si è raddoppiata in 20 minuti. Allora in 10 minuti la coltura è cresciuta grosso modo del (a) 25%, ~~(b)~~ 40%, (c) 50%, (d) 100%.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\log_{10}(x^2+2x-5)=1$.

$$\boxed{x^2+2x-5=10^1 \implies x_1=-5, \quad x_2=3}$$

4. Dite qual è la funzione inversa della funzione $f(x)=x^3$, $x \geq 0$. $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x},\ x \geq 0}$

   Disegnate i grafici delle funzioni $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nel sistema di riferimento della figura 1.

   Disegnate i grafici delle funzioni $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ in scala logaritmica nel sistema di riferimento della figura 2.

Figura 1

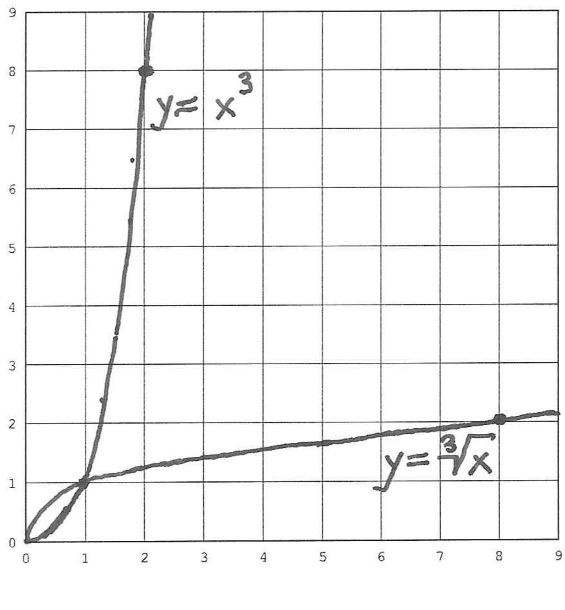
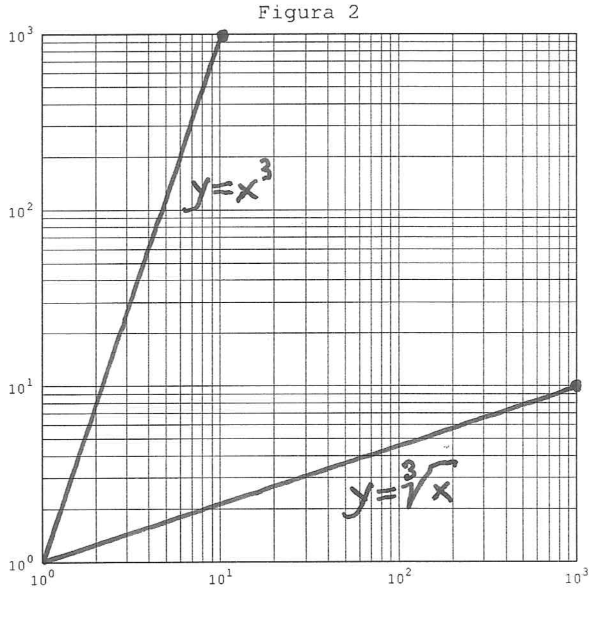


Figura 2



5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{3x}$, calcolare $f'(x)$ e $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$f'(x) = \boxed{(x+1)'e^{3x} + (x+1)(e^{3x})' = e^{3x} + 3(x+1)e^{3x} = (3x+4)e^{3x}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{\left[(x+1)\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(5e^3 - 2)}$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 6 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -9 & 12 & -1 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} =$ non è definito, $\mathbf{BA} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -4 & -5 & -3 \end{bmatrix}}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&1&1&0&0 \\ 1&3&1&0&1&0 \\ 3&0&2&0&0&1 \end{array}\right]$$

$R2-R1,\ R_3-3R1 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&1&1&0&0 \\ 0&-1&0&-1&1&0 \\ 0&-12&-1&-3&0&1 \end{array}\right]$$

$R3-12R2 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&1&1&0&0 \\ 0&-1&0&-1&1&0 \\ 0&0&-1&9&-12&1 \end{array}\right]$$

$-R2,\ -R3 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-9&12&-1 \end{array}\right]$$

$R1-R3 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&4&0&10&-12&1 \\ 0&1&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-9&12&-1 \end{array}\right]$$

$R1-4R2 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&6&-8&1 \\ 0&1&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&-9&12&-1 \end{array}\right]$$

$\vec{x}$ $\quad A^{-1}$

7. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy (omettendo le unità di misura):

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 4(60 - C) \\ C(0) = 10. \end{cases}$$

$\int \frac{dC}{60-C} = 4\int dt \quad (0 \le C < 60)$

$\Rightarrow -\ln|60-C| = 4t+k$

$60 - C = e^{-4t-k} = e^{-k}e^{-4t}$

$60-10 = e^{-k}$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$\boxed{C(t) = 60 - 50e^{-4t}}$

(b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$. $\boxed{\lim_{t\to+\infty} C(t) = 60}$

(c) Usando la risposta di (a) e il valore $\ln(2) \approx 0,69$, si determini t in modo tale che $C(t) = 35$.

$35 = 60 - 50e^{-4t}$

$\Rightarrow e^{-4t} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -4t = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

$\Rightarrow t = \frac{1}{4}\ln 2$

$\boxed{t = \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0,17}$