C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 10/06/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano $a_0, \dots, a_{10} \in \mathbb{N}$ tali che $a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0 = (x+1)^{10}$.
   Calcolare esplicitamente $a_0, \dots, a_{10}$:

1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

   Calcolare la somma $a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}$: porre $x=1$: $(1+1)^{10} = 1024$

2. Dopo 42 giorni dal primo rilevamento, la radioattività di una sostanza si è ridotta al 25% del valore iniziale. Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza in esame? (a) 10, 5, (b) 14, (c) 5, 25, ~~(d)~~ 21 giorni

3. Quanto vale $-\log_{10}(3,2 \cdot 10^{-8})$ approssimativamente?
   (a) 4, 8, ~~(b)~~ 7, 5, (c) 8, 3, (d) 8, 5

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6}$, calcolare

   (a) $f'(x) = \boxed{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}$

   (b) i minimi e i massimi assoluti:

   $x_{\min} = \dfrac{2\pi}{3}$, $y_{\min} = -2$ $x_{\max} = \pi$, $y_{\max} = -1$

   (c) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $\left(\dfrac{5}{6}\pi, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$:

   $$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}\pi - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

   (d) $f''(x) = \boxed{\dfrac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}}$ La f è convessa? Sì: ☐ No: ☒ ($f''(x) < 0$ per $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$)

5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calcolare $f'(x)$ e $\displaystyle\int_2^{2e} f(x)\,dx$:

$$f'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \ln 2 + \ln x$$

$$\int_2^{2e} f(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln\frac{x}{2}\Big|_2^{2e} - \frac{1}{2}\int_2^{2e} x\,dx = 2e^2 - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_2^{2e} = e^2 + 1$$

per parti

$$\left.\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \to \left.\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \to \left.\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \to$$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \to \left.\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} -3 & -4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \to \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}}_{=A^{-1}}$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}}$,

dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

7. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a. Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

Supponiamo che in un ambiente di 21 °C il corpo si raffreddi da 36 °C a 30 °C in **20** minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 36 °C, in quanto tempo il corpo raggiunge i 26 °C? Si trovi la risposta in tre passi:

(a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 21\,°\mathrm{C}) \\ T(0) = 36\,°\mathrm{C}. \end{cases} \qquad \int_{36}^{T} \frac{dT}{T-21} = k\int_0^t dt = kt$$

$$\frac{T-21}{15} = e^{kt} \Leftarrow \ln\left(\frac{T-21}{36-21}\right) = \left[\ln|T-21|\right]_{36}^{T} = kt$$

$\boxed{T(t) = (21 + 15\,e^{kt})\,°\mathrm{C}}$

(b) Si usi $T(20\text{ min}) = 30\,°\mathrm{C}$ per determinare la costante k.

$\ln\left(\frac{30-21}{36-21}\right) = k \cdot 20\,\text{min}$ $\boxed{k = \frac{\ln 3 - \ln 5}{20} \cdot \frac{1}{\text{min}}.}$

(c) Usando che $\ln(3) \approx 1,1$ e $\ln(5) \approx 1,6$, si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 26 °C (suggerimento: conviene utilizzare la soluzione $T(t)$ di (a) in forma implicita).

$\boxed{kt = \ln\frac{26-21}{36-21} = -\ln 3 \Rightarrow t = \frac{20\ln 3}{\ln 5 - \ln 3}\,\text{min.} \approx 40 \ln 3\,\text{min}}$

≈ 44 min.