C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 03/07/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quante parole (anche senza significato) di 4 lettere, ripetute o no, si possono formare con l'alfabeto $\{a, b, c, d\}$? $\boxed{4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = 256}$

   Quante di tali parole contengono due volte la a e due volte la b? $\boxed{\binom{4}{2} = 6}$

$(1+0{,}20)^4 \approx 2{,}\ldots$

$(1+0{,}2)^4 - 1$

$\approx 100\%$

2. Supponiamo che una coltura batterica di *Escherichia coli* si trovi nella fase esponenziale della sua crescita. In condizioni nutrizionali poveri, il numero dei batteri *E. coli* cresce ogni 10 minuti del 20%. Allora in 40 minuti la coltura è cresciuta grosso modo del (a) 80%, ~~(b)~~ 110%, (c) 210%, (d) 380%.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x - 2) = -2$.

$$\boxed{x^2+x-2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{array}}$$

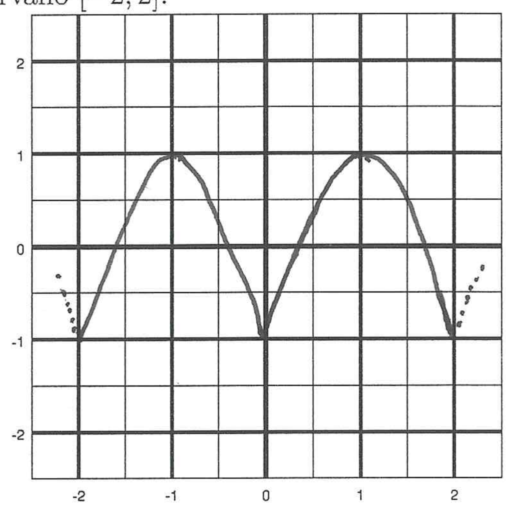
4. Data la funzione $f(x) = -1 + 2\left|\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|$, $x \in \mathbb{R}$,

   (a) dire qual è il periodo minimo della f: $\boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2}$

   (b) trovare i minimi e i massimi assoluti di f nell'intervallo $[-1, 1[$:

   $\boxed{x_{\min} = 0, \quad y_{\min} = -1}$ $\boxed{x_{\max} = -1, \quad y_{\max} = 1}$

   (c) disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-2, 2]$:



5. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, calcolare:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1}$

$f'(x) = \boxed{\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \boxed{\int_1^2 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\sqrt{u}\right]_1^2 = \sqrt{2}-1}$

(integrazione per sostituzione: $u = x^2+1$) $du = 2x\,dx$

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -9 & 6 & -1 \\ 22 & -15 & 3 \end{bmatrix}}$,

dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-3R_1 \\ R_3+2R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3+R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1+R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{x}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=A^{-1}}$

7. Lo svuotamento di un serbatoio cilindrico avente sul fondo un foro di uscita (a scarico libero, cioè senza tubazione) può essere modellato attraverso il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh(t)} \\ h(0) = h_0\,, \end{cases}$$

$\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh}$

$\dfrac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\dfrac{S_2}{S_1}dt \Rightarrow \int_{h_0}^{h} \dfrac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,\dfrac{S_2}{S_1}\int_0^t dt$

dove $h = h(t)$ è l'altezza della colonna d'acqua nel serbatoio al tempo t, h_0 la quota iniziale, $g \approx 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ l'accelerazione di gravità, S_1 la sezione del serbatoio e S_2 l'area del foro di uscita. $(h \neq 0)$

$2\left(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}\right) = -\sqrt{2g}\,\dfrac{S_2}{S_1}t$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy: $\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{S_2}{S_1}t + \sqrt{h_0}$

$\boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{S_2}{S_1}t\right)^2}$

(b) Si calcoli il tempo di svuotamento t_s (in min) supponendo che $h_0 = 180$ cm e che il serbatoio e il foro siano circolari di diametro 100 cm e 5 cm rispettivamente:

$\boxed{t_s = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \approx \left(\frac{100}{5}\right)^2\sqrt{\frac{3{,}6}{10}}\,s = 400\cdot 0{,}6\,s = 4\ \text{min}.}$

$h(t_s) = 0 \Rightarrow \sqrt{h_0} = \sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{S_2}{S_1}t_s \Rightarrow t_s = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$