C.d.L. in Produzioni animali e controllo della fauna selvatica

Prova di Matematica del 17/09/2014

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle due facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti numeri di esattamente 3 cifre si possono formare con le cifre del numero 2345678? (a) senza ripetere la stessa cifra: $\boxed{7 \cdot 6 \cdot 5 = 210}$

   (b) anche ripetendo la stessa cifra: $\boxed{7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343}$

2. Qual è l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione $\dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} \leq 0$?

   (a) $]-\infty, 0]$, (b) $]-\infty, -1[$, (c) $]-\infty, -1[\cup]-1, 0]$, $\boxed{\text{(d) } \{0\} \cup]-\infty, -1[}$.

3. Trovare la soluzione dell'equazione $10^x + 10^{x+1} = 0,00011$.

   $$\boxed{10^x + 10^{x+1} = 10^x(1 + 10) = 11 \cdot 10^x = 11 \cdot 10^{-5} \Rightarrow 10^x = 10^{-5} \Rightarrow x = -5}$$

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \boxed{= x^{-2} \ln x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$,

   (a) determinare $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{-\infty}$

   (b) calcolare $f'(x) = \boxed{(x^{-2})' \ln x + x^{-2} (\ln x)' = -2x^{-3} \ln x + x^{-2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}}$

   (c) calcolare $f''(x) = \boxed{(x^{-3})' \cdot (1 - 2\ln x) + x^{-3} \cdot (1 - 2\ln x)' = \dfrac{6 \ln x - 5}{x^4}}$

   (d) trovare e classificare il punto stazionario x_0 di f $\boxed{\text{, cioè } f'(x_0) = 0}$:

   $\boxed{x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad \text{, si tratta di un punto di massimo poiché } f''(x_0) < 0;}$

   (e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, 0)$:

   $\boxed{y = f'(1)(x - 1) = x - 1}$

(f) trovare gli intervalli di convessità/concavità e il punto di flesso di f:

$\boxed{\text{conc.} \Leftrightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt[6]{e^5}, \text{ conv.} \Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[6]{e^5}}$

$\boxed{\text{Punto di flesso: } \left(\sqrt[6]{e^5}, \frac{5}{6e\sqrt[3]{e^2}}\right)}$

(g) calcolare $\int_1^e f(x)\,dx$ (integrazione per parti):

$$\int_1^e f(x)\,dx = \boxed{\left[-x^{-1}\cdot\ln x\right]_1^e - \int_0^e \left(-x^{-1}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}}$$

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 14 & 20 \end{bmatrix}}$, dove

$\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

6. La scarica di un condensatore può essere modellato attraverso il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{Q(t)}{C} + R\cdot\frac{dQ(t)}{dt} = 0 \\ Q(0) = Q_0\,, \end{cases}$$

dove $Q(t)$ è la carica accumulata nel condensatore al tempo t, Q_0 la carica iniziale, C la capacità del condensatore ed R la resistenza del circuito.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy:

$\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$

(b) Si calcoli il tempo di scarica, cioè il tempo $t_{10\%}$ in cui la carica raggiunge il 10 % del valore iniziale Q_0:

$\boxed{t_{10\%} = RC\cdot\ln(10)}$

(c) Si ricavi l'equazione della corrente in funzione del tempo (ed usando le costanti Q_0, C, R):

$\boxed{I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$

5(a),(b). $$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R3 - R1 \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R3 + \tfrac{1}{2}R2 \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R2/2 \to \\ 2R3 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R1 - 3R3 \\ R2 - \frac{3}{2}R3 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & 7 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R1 - 2R2 \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6(a). $\dfrac{Q(t)}{C} + R \cdot \dfrac{dQ(t)}{dt} = 0 \Rightarrow R \cdot \dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{Q}{C}$ (scriviamo Q al posto di $Q(t)$),

separando le variabili Q e t otteniamo: $R \cdot \dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{dt}{C}$, integrando:

$$R \cdot \int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{C}\int_0^t dt \Rightarrow R\left[\ln Q\right]_{Q_0}^{Q} = R \cdot \ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{C} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{Q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

6(a). $\dfrac{Q_0}{10} = Q_0 \cdot e^{-\frac{t_{10\%}}{RC}} \Rightarrow 10 = e^{\frac{t_{10\%}}{RC}} \Rightarrow \ln(10) = \dfrac{t_{10\%}}{RC} \Rightarrow t_{10\%} = RC \cdot \ln(10)$