Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA PER LE APPLICAZIONI

A.A. 2017/18 - N1

1.
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2 = 0 \\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3 = 0 \\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9 = 0\,. \end{cases}$$

a) Utilizzando il metodo di eliminazione, si determinino tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.

b) Si stabilisca se il sistema ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.

c) Si determinino tre polinomi $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ tali che il sistema di equazioni $f = g = h = 0$ abbia le stesse soluzioni in $\mathbb{Q}$ del sistema su scritto, ma i due ideali (f, g, h) e $(x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2,\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3,\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ siano diversi.

d) Si stabilisca se il secondo ideale eliminazione dell'ideale $(x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2,\ 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3,\ 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9) \cap \mathbb{Q}[z]$ è un ideale primo.

e) Si scrivano due diversi ideali radicali non massimali di $\mathbb{Q}[x, y, z]$ contenenti l'ideale $(x^4 - 4x^2y - 12yz - 9z^2, 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3, 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9)$ di $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

f) Si stabilisca se i due polinomi $p_2 = 4y^2 + 16yz - 3z^3 - 12z - 3, p_3 = 4x^4 - 16x^2y - 48yz + 9z^3 + 36z + 9$ hanno un fattore comune di grado positivo.

2. In $k[x, y, z]$ con k campo si considerino i tre polinomi

$$f = 2x^2 - yz - 1,\ g = x - yz^2 + z,\ h = 3z + 1.$$

a) Si calcolino

$$R_1 = Res(f, g; x),\ R_2 = Res(f, g; y),\ R_3 = Res(f, g; z)$$

e si stabilisca se R_1, R_2, R_3 generano rispettivamente gli ideali

$$I_1 = (f, g) \cap k[y, z],\ I_2 = (f, g) \cap k[x, z],\ I_3 = (f, g) \cap k[x, y]$$

e se i due polinomi f, g hanno un fattore comune di grado positivo nella variabile x (rispettivamente y, z).

b) Sia K il campo complesso. Nel caso i due polinomi f, g non abbiano un fattore comune di grado positivo in nessuna delle tre variabili, questo significa necessariamente che f, g non hanno radici comuni? Perché?

c) Si calcolino i risultanti generalizzati di f, g, h rispetto a x.

3. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^3$ data dalla seguente parametrizzazione razionale:
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{u} + 1 \\ y = \dfrac{v-1}{u} \\ z = \dfrac{3-u^2}{uv} \end{cases}$$
   a) Si determini la più piccola varietà W di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathcal{S}$.
   b) Si stabilisca se $W = \mathcal{S}$, cioè se dato $P = (a,b,c) \in W$ è sempre possibile trovare $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u,v,a,b,c) soddisfino le equazioni date.

4. In $\mathbb{R}^3$, dove è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sia C la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t^2 + t - 1 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$
e sia r la retta di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0\,. \end{cases}$$
   a) Si stabilisca se la curva C é piana, determinando l'eventuale piano che la contiene.
   b) Si scriva l'equazione cartesiana del cilindro S che proietta la curva C parallelamente alla retta r.
   c) Si scrivano le equazioni di due rette r_1 e r_2 giacenti su S.

5. Si consideri l'ideale $I = (-x^3 + y, x^2y - z) \subset C[x,y,z]$.
   a) Si stabilisca se il polinomio $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ appartiene all'ideale I.
   b) Si stabilisca se il polinomio $g = x^2y - z^2 + y^3 - z^3$ appartiene al radicale dell'ideale I.

6. Siano $I = (x, y^2)$, $J = (x^2 + y)$ ideali dell'anello $R[x,y]$.
   a) Si determini una base dell'ideale $I + J^2$.
   b) Si determini una base dell'ideale $I + J^3$.

7. Siano $I = (x^3 + y^2 - 1, x + z - 1)$, $J = (x^3y + y)$ ideali dell'anello $R[x,y,z]$. Si determini una base dell'ideale $I \cap J$.

8. Si stabilisca

a) se l'ideale $(xy, x^3 - x^2, x^2y - xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$ è un ideale radicale;

b) se vale la seguente uguaglianza di ideali

$$(xy, x^3 - x^2, x^2y - xy) = (x) \cap (x^2, y) \cap (x - 1, y).$$

9. Si stabilisca se esiste un valore di $a \in R$ per il quale l'ideale $I = (x^2 - ax + 3, y^2 - y + 1) \subset \mathbb{R}[x, y]$ è un ideale primo.

10. Sia $I = (xz - y^2, x^3 - yz) \subset R[x, y]$.

    a) Si mostri che $I : (x^2y - z^2) = (x, y)$.

    b) Si provi che $I = (x, y) \cap (xz - y^2, x^3 - yz, x^2y - z^2)$.