14. 12. 2002

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Considerare la funzione:

$$f(x,y) = (3x - 4y + 12)^2 \,.$$

   (a) Descrivere le curve di livello della funzione f.

   (b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (c) Qual è il valore della derivata direzionale della funzione f in direzione della retta di equazione $3x - 4y + 12 = 0$?

2. Calcolare gli integrali: a) $\displaystyle\int e^{-5t+2}\,dt$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int (2x-1)\cos x\,dx$.

3. Calcolare l'area della regione limitata superiormente da $y = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x$, inferiormente da $y = \operatorname{sen} x$ e ai lati dalle rette $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

4. Trovare un valore approssimato per l'integrale

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

   sviluppando la funzione integranda in serie di Taylor e arrestandosi quando si è ottenuto un polinomio di Taylor di sesto grado, ed eseguendo poi l'integrazione. (Nota bene: Il modo più semplice per ottenere lo sviluppo di Taylor in questione è di sostituire x con $-\frac{1}{2}x^2$ nello sviluppo di Taylor di e^x.)

   Facoltativo: Siano $m, \sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ costanti. Usare il valore trovato per il suddetto integrale e la sostituzione $t = \sigma x + m$ per calcolare

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} e^{\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}\,dt \,.$$

5. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

   dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

14. 12. 2002

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Considerare la funzione:
$$f(x,y) = -(5x-y+1)^2\,.$$
   (a) Descrivere le curve di livello della funzione f.

   (b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (c) Qual è il valore della derivata direzionale della funzione f in direzione della retta di equazione $5x - y + 1 = 0$?

2. Calcolare gli integrali: a) $\int e^{3t+5}\,dt$, b) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, c) $\int (x-1)\mathrm{sen}\,x\,dx$.

3. Calcolare l'area della regione limitata superiormente da $y = \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x$, inferiormente da $y = -\mathrm{sen}\,2x$ e ai lati dalle rette $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}\pi$.

4. Trovare un valore approssimato per l'integrale
$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$
sviluppando la funzione integranda in serie di Taylor e arrestandosi quando si è ottenuto un polinomio di Taylor di quarto grado, ed eseguendo poi l'integrazione. (Nota bene: Il modo più semplice per ottenere lo sviluppo di Taylor in questione è di sostituire x con $-\frac{1}{2}x^2$ nello sviluppo di Taylor di e^x.)

   Facoltativo: Siano $m, \sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ costanti. Usare il valore trovato per il suddetto integrale e la sostituzione $t = \sigma x + m$ per calcolare
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\frac{1}{2}\sigma}^{m+\frac{1}{2}\sigma} e^{\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}\,dt\,.$$

5. Nella decomposizione del pentossido d'azoto $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4\,NO_2 + O_2$ la concentrazione $C = C(t) = [N_2O_5]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

14. 12. 2002

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Considerare la funzione:
$$f(x,y) = (x-2y+1)^2\,.$$
   (a) Descrivere le curve di livello della funzione f.

   (b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (c) Qual è il valore della derivata direzionale della funzione f in direzione della retta di equazione $x-2y+1=0$?

2. Calcolare gli integrali: a) $\int e^{4t+1}\,dt$, b) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^3}\,dx$, c) $\int (3x+1)\operatorname{sen} x\,dx$.

3. Calcolare l'area della regione limitata superiormente da $y = \cos\frac{1}{2}x$, inferiormente da $y = \operatorname{sen} 2x$ e ai lati dalle rette $x = \frac{1}{2}\pi$ e $x = \pi$.

4. Trovare un valore approssimato per l'integrale
$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$
sviluppando la funzione integranda in serie di Taylor e arrestandosi quando si è ottenuto un polinomio di Taylor di sesto grado, ed eseguendo poi l'integrazione. (Nota bene: Il modo più semplice per ottenere lo sviluppo di Taylor in questione è di sostituire x con $-\frac{1}{2}x^2$ nello sviluppo di Taylor di e^x.)

   Facoltativo: Siano $m, \sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ costanti. Usare il valore trovato per il suddetto integrale e la sostituzione $t = \sigma x + m$ per calcolare
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} e^{\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}\,dt\,.$$

5. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

14. 12. 2002

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Considerare la funzione:

$$f(x,y) = -(x-3y+2)^2 \, .$$

   (a) Descrivere le curve di livello della funzione f.

   (b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (c) Qual è il valore della derivata direzionale della funzione f in direzione della retta di equazione $x-3y+2=0$?

2. Calcolare gli integrali: a) $\displaystyle\int e^{-2t+5}\,dt$, b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$, c) $\displaystyle\int (-x+1)\cos x\,dx$.

3. Calcolare l'area della regione limitata superiormente da $y = \cos\frac{1}{2}x$, inferiormente da $y=\cos x$ e ai lati dalle rette $x=0$ e $x=\pi$.

4. Trovare un valore approssimato per l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

   sviluppando la funzione integranda in serie di Taylor e arrestandosi quando si è ottenuto un polinomio di Taylor di secondo grado, ed eseguendo poi l'integrazione. (Nota bene: Il modo più semplice per ottenere lo sviluppo di Taylor in questione è di sostituire x con $-\frac{1}{2}x^2$ nello sviluppo di Taylor di e^x.)

   Facoltativo: Siano $m, \sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ costanti. Usare il valore trovato per il suddetto integrale e la sostituzione $t = \sigma x + m$ per calcolare

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\frac{1}{4}\sigma}^{m+\frac{1}{4}\sigma} e^{\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}\,dt \, .$$

5. Nella decomposizione del pentossido d'azoto $2\,\mathrm{N_2O_5} \longrightarrow 4\,\mathrm{NO_2} + \mathrm{O_2}$ la concentrazione $C = C(t) = [\mathrm{N_2O_5}]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

   dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.