Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi 16. 10. 2003

1. Trovare i limiti delle seguenti successioni $\{a_n\}$ per n tendente all'infinito:

   a) $a_n = (2 + \frac{3}{n})(4 - \frac{100}{n})$, b) $a_n = \frac{2n+5}{7n-5}$

   c) $a_n = \frac{an^2 + 400n}{bn^2 - 400}$ $(b \neq 0)$, d) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{3n}$.

2. Dimostrare che $\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

3. Trovare $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{3n}$.

4. Per studiare un problema di allevamento di consanguinei, O. Kempthorne (An introduction to genetic statistics. Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1957; p. 86) applica la successione

   $$F_n = \frac{s}{2-s}[1 - (s/2)^n] + (s/2)^n F_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   per la quale $0 < s < 1$. Trovare come si comporta il limite di F_n per n tendente all'infinito.

5. Trovare $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n})^n$ e $\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen} 5h}{h}$.

6. Calcolare le seguenti somme parziali:

   a) $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + 1/243$,

   b) $2 + 2/11 + 2/11^2 + \cdots + 2/11^5$,

   c) $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + 1/64$.

7. Calcolare le serie infinite:

   a) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ supponendo che $|r| < 1$,

   b) $c + c/2 + c/2^2 + c/2^3 + \cdots$,

   c) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - \cdots$ supponendo che $-1 < r < +1$.

8. Studiando la vita media di un gene dannoso, C. C. Li (Population genetics. 2nd impression. The University of Chicago Press, London-Chicago, 1958; p. 150) è giunto alla seguente serie infinita:

   $$U = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \cdots$$

   dove $0 < w < 1$. Trovare un'espresssione concisa per U. (Nota: determinare prima la differenza $U - wU$).

9. Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2.3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva. ^{137}Cs è un pericoloso inquinante contenuto nel *fall-out* radioattivo. Supponiamo che ogni anno si liberi nell'ambiente la stessa massa M del ^{137}Cs. Qual è la massa totale che verrà accumulata (a) dopo n anni, (b) quando viene raggiunto l'equilibrio ($n \to \infty$)?

10. Trovare i limiti $\quad \lim_{x\to 2-} \dfrac{3}{x-2} \quad$ e $\lim_{x\to 2+} \dfrac{3}{x-2}$.

11. Dimostrare che le funzioni

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

sono continue in $x = 0$. Esse sono anche derivabile in $x = 0$?

12. Il pH di una soluzione è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$, dove $[\mathrm{H}^+]$ indica la concentrazione (in mol/l) di H^+.

    a) Una soluzione abbia un pH di 11. Per quale pH la concentrazione di H^+ risulterebbe cento volte maggiore?

    b) Sia $[\mathrm{H}^+] = 3.3 \times 10^{-5}$ mol/l. Utilizzando che $\log_{10} 33 = 1.5$, trovare il pH.

13. Svolgere le seguenti operazioni con i numeri complessi:
    a) $(2+3i)-(5-4i)$, b) $(3-2i)(4+5i)$, c) $\dfrac{3-2i}{4+5i}$, d) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

14. Trovare i moduli e gli argumenti dei seguenti numeri complessi:
    a) $3+4i$, b) $-1-i$, c) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

15. Determinare la parte reale e la parte immaginaria di tutte le radici dell'equazione $z^3+1=0$.

16. Quali dei seguenti numeri complessi si possono ottenere da $z = x+iy$ geometricamente? Si faccia un disegno.
    a) $\overline{z} := x - iy$ (numero complesso coniugato), b) $\overline{(-z)}$, c) $-z$, d) $\dfrac{1}{z}$.

17. Si rappresentino graficamente i punti $z = x + iy$ che soddisfano le condizioni date:
    a) $|z| = 2$, b) $|z| < 2$, c) $|z| > 2$, d)$|z-1| = 2$, e) $|z+i| = |z-1|$.

18. Sia S l'insieme definito in coordinate polari nel piano dalle seguenti disuguaglianze:

$$2 \le r \le 4\,; \quad \frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}\,.$$

Calcolare l'area di S.