Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi

27. 10. 2003

1. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive. Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:
   (a) $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita).
   (b) $f(t) = a(1 + \dfrac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}})$ (funzione della cinetica chimica).
2. Qual è il coefficiente di a^3b^2c nello sviluppo della potenza $(a + b + c)^6$?
3. Quanti sono i numeri di 7 cifre che si posssono formare in notazione binaria? E quanti in notazione decimale?
4. Determinare quanti termini diversi si ottengono eseguendo la potenza
$$(a + b + c + d)^3 \,.$$
5. Un giocatore del SuperEnalotto deve pronosticare i sei numeri estratti da novanta numeri. Quante sono le possibili scelte?
6. Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni:
   a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}\,, \quad f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{-3x}},$
   b) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}\,, \quad f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2},$
   c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \quad f(x) = e^x - e^{-x}.$
7. Si studi la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni:
   a) $f(x) = |x| \cdot \cos x, \quad x \in \mathbf{R},$
   b) $f(x) = |x| \cdot (\cos x - 1), \quad x \in \mathbf{R},$
   c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\,. \end{cases}$
8. Trovare le derivate di
   a) $v(t) = \ln t + t^{-1}$, b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$, d) $y = e^x \operatorname{sen} x$
   e) $v(t) = a \operatorname{sen} t + t^{-2}$, f) $y = \cos(e^{2x})$, g) $y = \dfrac{x^2}{x+5}$, h) $y = \sqrt{x}\, \ln x$.
9. Trovare le derivate di
   a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c$, b) $y = 3\cos x - 2 \operatorname{sen} x$, c) $y = \dfrac{x}{x-3}$,
   d) $z(t) = (1-t)\cos t$, e) $f(y) = a \cdot \sqrt{y}\, \operatorname{sen} y$, f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$,
   g) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, i) $f(x) = \cosh(4x^2 - x + 1)$.

10. Il diametro di un cilindro circolare retto misura $6,0 \pm 0,003$ cm mentre la sua altezza misura $4,0 \pm 0,002$ cm. Qual è (a) il massimo errore possibile e (b) il massimo errore percentuale che si commette nel calcolo del volume? (Si usi il differenziale per approssimare l'errore del volume.)

11. Un grandezza positiva a abbia un errore assoluto Δa, molto piccolo nel confronto con a. Stimare l'errore assoluto del reciproco di a.

12. Mediante il differenziale calcolare approssitivamente la quantità $\sqrt{10001}$.

13. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \ln x$ e il valore $\ln 50 = 3,91$ per calcolare approssitivamente $\ln 51$.

14. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$, dove $[\mathrm{H}^+]$ indica la concentrazione (in mol/l) di H^+.

    A quante unità di pH corrisponde un errore di misura della concentrazione di H^+ del 20%? (Si usi il differenziale della funzione logaritmica e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$.)

15. Determinare i punti di minimo e massimo relativi ed i punti di flesso delle funzioni:

    a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1,$ b) $f(x) = 2\cos x + \cos 2x,$

    c) $f(x) = x + \operatorname{sen} x,$ d) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{1+x^2}.$

16. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},$

    a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
    b) trovare i minimi e i massimi relativi e assoluti;
    c) determinare gli intervalli in cui è convessa o concava ed i punti di flesso;
    d) determinare gli asintoti;
    e) disegnare il grafico.

17. Determinare gli asintoti delle funzioni:

    a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1},$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

18. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

    $$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

    prendendo come punto iniziale $x_0 = 1$.

19. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni (prendendo come punto iniziale $x_0 = 0$) e dire per quali valori di x la serie è convergente:

    a) $f(x) = \ln(1 + 2x),$ b) $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{3}),$ c) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-x},$

    d) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x},$ e) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}.$