Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi

7. 11. 2003

1. Supponiamo che una popolazione d'ampiezza 25 000 (al tempo $t = 0$) cresca secondo la formula $N = 25\,000 + 45t^2$, dove il tempo t è misurato in giorni. Trovare il tasso medio di accrescimento negli intervalli di tempo a) da $t = 0$ a $t = 2$, b) da $t = 2$ a $t = 10$, c) da $t = 0$ a $t = 10$.

2. Determinare se i grafici delle seguenti funzioni sono convessi o concavi:

   a) $y = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$, b) $y = \dfrac{1}{x^2} \quad (x > 0)$,

   c) $y = \dfrac{1}{1-x} \quad (0 < x < 1)$, d) $y = \dfrac{x-2}{x-3} \quad (x > 3)$.

3. In acqua o in una soluzione acquosa il prodotto delle concentrazioni degli ioni idronio $[H_3O^+]$ e degli ioni idrossido $[OH^-]$ è molto prossimo a 10^{-14} (le misure sono state fatte in moli/litro). Posto

   $$S = [H_3O^+] + [OH^-]\,,$$

   determinare il valore di $[H_3O^+]$ ch e rende minimo S. Nota: porre $[H_3O^+] =: x$.

4. In una reazione auto-catalitica una sostanza si trasforma in una nuova sostanza, il prodotto, in modo tale che il prodotto stesso catalizza la propria formazione. Supponiamo che il tasso di reazione sia proporzionale all'ammontare x del prodotto al tempo t e proporzionale anche alla quantità ancora disponibile della sostanza originaria. Se a indica la quantità originaria della sostanza, essa diminuisce ad $a - x$ al tempo t. Perciò,

   $$\frac{dx}{dt} = kx(a-x) \qquad (k \text{ è una costante positiva}).$$

   Trovare il valore di x che rende massimo il tasso di reazione.

5. Considerare la funzione

   $$f(t) = c(e^{-at} - e^{-bt})$$

   con i parametri positivi a, b, c e il dominio $t \geq 0$. Supposto che $b > a$, mostrare che

   (a) $f(0) = 0$,

   (b) $f(t) > 0$ per $t > 0$,

   (c) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$,

   (d) $f(t)$ raggiunge un massimo per $t = \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$,

   (e) la funzione ha un solo punto di flesso.

Questa funzione viene usata per adattare la relazione concentrazione-tempo quando si inietta un farmaco nel flusso sanguigno (si vedano Heinz, E: Probleme bei der Diffusion kleiner Substanzmengen innerhalb des menschlichen Körpers. Biochem. Z. **319**, 482–492 (1949) o Defares, J.G., Sneddon, I.N., Wise, M.E.: An introduction to the mathematics of medicine and biology. 2nd edition, Amsterdam-London, North-Holland, 1973, pag. 235.

6. Consideriamo una sostanza contenente N_0 atomi radioattivi (al tempo $t = 0$) e supponiamo che ci sia un solo genere di isotopo radioattivo. Indichi N il numero degli atomi radioattivi presenti nella sostanza al tempo t. La disintegrazione radioattiva segue la legge $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Trovare il periodo (cioè il tempo di dimezzamento) delle sostanze radioattive a) ^{131}I, b) ^{18}F le cui costanti λ di disintegrazione sono $0,086\ \mathrm{d}^{-1}$ e $0,371\ \mathrm{h}^{-1}$, rispettivamente (d = giorno, h = ora). Questi isotopi sono usati in medicina sia per la diagnosi sia per la terapia.

7. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione
$$x + \cos x = 0$$
sostituendo la funzione $\cos x$ con il suo polinomio di Taylor $p_3(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$. Valutare l'errore che si commette approssimando $f(x) = \cos x$ con il polinomio $p_3(x)$, per $-1 < x < 0$, cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange $R_3(x)$, $-1 < x < 0$.

8. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione
$$e^x + x = 0$$
sostituendo la funzione e^x con il suo polinomio di Taylor $p_2(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$. Valutare l'errore che si commette approssimando $f(x) = e^x$ con il polinomio $p_2(x)$, per $-0,6 < x < 0$, cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange $R_2(x)$, $-0,6 < x < 0$.

9. Calcolare i seguenti limiti:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$,

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan 3x}$,

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x$,

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

   f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)^{-x}$,

   g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.