Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi

21. 11. 2003

1. Calcolare gli integrali indefiniti

   a) $\int x^{-6}\,dx$, b) $\int t^{-1/3}\,dt$, c) $\int (u + 2u^2 + 3u^3)\,du$,

   d) $\int \cos(3\theta + 2)\,d\theta$, e) $\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx$, f) $\int (3t+2)^5\,dt$.

2. Calcolare

   a) $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$, b) $\int_1^2 \frac{1}{r^2}\,dr$, c) $\int_{-\beta}^{\beta} \operatorname{sen}\alpha\,d\alpha$,

   d) $\int_p^q x^2\,dx$, e) $\int_a^{a+1} \frac{du}{u^2}$, f) $\int_0^s t^{2/3}\,dt$.

3. Data la funzione $f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $x \neq 0$, calcolare l'area della regione limitata dal grafico, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = -e$ e $x = -1$.

4. Integrare per parti

   a) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, b) $\int t\cos\omega t\,dt$, c) $\int_0^3 \frac{ds}{(4-s)^3}$.

5. Integrare per sostituzione

   a) $\int \cos\omega x\,dx$, b) $\int_0^2 (4t+3)^4\,dt$, c) $\int \sqrt{p+qs}\,ds \quad (q \neq 0)$.

6. Data la funzione $f(x) = 3 + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, calcolare l'area sotto il grafico sull'intervallo $[1-e, 0]$ (integrazione per sostituzione: $t = x - 1$).

7. a) Calcolare l'area della regione limitata superiormente dalla curva di equazione $y = 9 - x^2$ e inferiormente dall'asse x.

   b) Calcolare il volume del solido ottenuto quando la regione di a) è fatta ruotare intorno all'asse y.

8. Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =: \cosh x$ da $x = 0$ ad $x = \ln 2$.

9. Calcolare gli integrali:

   a) $\int_0^4 (\frac{1}{4}x+1)^3\,dx$, b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\int x \cdot \ln x\,dx$, d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$.

10. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT\,,$$

dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in Nm^4/mol^2) e b (in m^3/mol) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante). Calcolare il lavoro compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

11. Si usi lo sviluppo in serie di Taylor della funzione e^x per trovare un polinomio che approssimi e^{-x^2} nell'intervallo $[0,1]$ abbastanza bene per calcolare $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ fino alla seconda cifra decimale. Si calcoli in tal modo il valore approssimato dell'integrale.

    Nota: Una primitiva di e^{-x^2} non è esprimibile in termini di funzioni elementari e quindi l'integrale può venir calcolato solo per via numerica.

12. Si usi lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\operatorname{sen} x$ per trovare un polinomio che approssimi $\operatorname{sen}(x^2)$ nell'intervallo $[0,1]$ abbastanza bene per calcolare $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ fino alla terza cifre decimale. Si calcoli in tal modo il valore approssimato dell'integrale.

    Nota: Una primitiva di $\operatorname{sen}(x^2)$ non è esprimibile in termini di funzioni elementari.

13. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

    a) $2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0\,,$ b) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0\,.$

14. Risolvere le seguenti equazioni differenziali separando le variabili:

    a) $y' = \dfrac{y}{x},$ b) $y' = -\dfrac{x}{y},$ c) $y'\sqrt{1-x^2} + y^2 = 0 \quad (x \in]-1,1[).$

15. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-2)$$

    con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

    Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\dfrac{1}{y(y-2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y}).$

16. Risolvere

$$\frac{dv}{dt} = k\frac{v}{2-v} \qquad (0 < v < 2)$$

    con la condizione iniziale $v = 1$ in $t = 0$.

    Questa equazione si presenta in genetica, vedasi [J. A. Sved and O. Mayo: The evolution of dominance. In: Mathematical topics in population genetics. Ken-ichi Kojima (Ed.). Biomathematics, Vol. **1**, 289–316. Berlin-Heidelber-New York: Springer 1970].

17. Risolvere

$$\frac{dy}{dx} = k(1 - \frac{y-1}{K})^2 \qquad (k > 0,\ K > 0)$$

    con la condizione iniziale $y = 1$ in $x = 0$.

    Questa equazione differenziale si trova in genetica, vedi Robertson, A.: A theory of limits in artificial selection with many linked loci. In: Mathematical topics in population genetics. Ken-ichi Kojima (Ed.). Biomathematics, Vol. 1, pp. 246–288, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1970; pag. 267.

18. Si trovi il lavoro compiuto nel pompare tutta l'acqua da un serbatoio conico, avente un raggio di 10 m alla sommità e un'altezza di 8 m, a un un'altezza di 6 m al disopra della sommità del serbatoio.