Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi

29. 11. 2003

1. Dati i vettori $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-3,2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
2. Trovare la somma di $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.
3. Trovare l'angolo tra i vettori $\vec{p} = (3,0,-4)$, $\vec{q} = (-2,2,1)$.
4. Determinare la distanza del punto $(1,1,1)$ dal punto $(0,0,0)$ e dal punto $(2,-5,3)$.
5. Dire se la retta congiungente i punti $(-1,0,4)$, $(-3,5,7)$ è ortogonale al vettore $(2,-5,3)$.
6. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $(2,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,0,-1)$.
7. Dire se la retta congiugente i punti $(-1,0,4)$, $(-3,5,7)$ è ortogonale al piano di equazione $2x - 5y + 3z = 7$.
8. Dati i tre punti $A(4,-1,0)$, $B(8,0,1)$ e $C(0,-2,4)$, calcolare
   a) la differenza dei vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$;
   b) il prodotto vettoriale dei vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (O è l'origine).
   c) l'area del parallelogramma generato dai vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$.
9. Descrivere e rappresentare le curve di livello per ognuna delle seguenti funzioni:
   a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$, b) $f(x,y) = 4xy$,
   c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x+1}$, d) $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.
10. Trovare le derivate parziali di primo e secondo ordine delle seguenti funzioni:
    a) $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, b) $Q(v,w) = w \cdot \ln v$,
    c) $S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, d) $\Phi(s,t) = se^{at}$.
11. Si consideri la superficie di equazione $z - 3 = +\sqrt{6 - (x-1)^2 - (y-2)^2}$.
    a) Si dimostri che si tratta di una porzione di sfera, e se ne trovino centro e raggio.
    b) Si trovi l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto di coordinate $(2,3,5)$.
12. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$
    Calcolare $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

13. Il diametro di un cilindro circolare retto misura $6,0 \pm 0,006$ cm mentre la sua altezza misura $4,0 \pm 0,002$ cm. Qual è (a) il massimo errore possibile e (b) il massimo errore percentuale che si commette nel calcolo del volume?
    Si usi il differenziale totale per approssimare l'errore del volume, cfr. Esercizio 10 del 27. 10. 2003.

14. Si consideri la funzione $z = f(x, y) = 3x - 4y + 26$.
    a) Quale superficie rappresenta il grafico della funzione? Trovare un vettore unitario normale alla superficie.
    b) In quale direzione orientata si dovrebbe procedere per ottenere la massima velocità di crescita della funzione?
    c) Qual è la velocità istantanea di variazione di $f(x, y)$ riferita all'unità di lunghezza in questa direzione?

15. Calcolare la derivata direzionale della funzione $z = f(x, y) = (x + 2y - 2)^2 + 3(y - 2x)^2$ nel punto $P = (3, 6)$ secondo la direzione della retta di equazione $2x - y = 0$.

16. La temperatura T in un punto (x, y) su una lastra di metallo è data da

$$T(x, y) = 200\, e^{-x^2-3y^2}$$

    dove T è misurata in °C, e x, y in metri.
    a) Trovare la velocità di incremento della temperatura nel punto $P = (2, -1)$ nella direzione verso il punto $Q = (3, -3)$.
    b) In quale direzione si ha il massimo incremento in P?
    c) Trovare la massima velocità di incremento in P.
    d) Trovare massimi e minimi della funzione $T(x, y)$.

17. Trovare il minimo della funzione

$$z = 9x^2 - 6xy + 2y^2 - 6y + 11\,.$$

18. Trovare un massimo relativo della funzione $z = e^{-(x^2+y^2)}$.
    È tale massimo anche il massimo assoluto?

19. Data la funzione $z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$,
    a) determinare i punti stazionari di $f(x, y)$;
    b) trovare i minimi e i massimi locali di $f(x, y)$ diversi da $(0, 0)$;
    c) decidere se $f(x, y)$ ha un minimo o massimo locale nel punto $(0, 0)$.

20. Sia $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $f(r)$ una funzione derivabile.
    Dimostrare che $\operatorname{grad} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\,\vec{r}$.

21. Dimostrare che $\vec{\nabla} F$ è un vettore perpendicolare alla superficie $F(x, y, z) = c$, dove c è una costante.
    Suggerimento: Scrivere dF come prodotto scalare.