13. 12. 2003

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   a) $\int \sqrt{3x-1}\,dx$, b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

2. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione

   $$(P+\frac{a}{V^2})(V-b) = RT\,,$$

   dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in $\mathrm{Nm}^4/\mathrm{mol}^2$) e b (in $\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante). Calcolare il lavoro compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

3. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 2 e 1 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale

   $$\frac{dx}{dt} = k(2-x)(1-x)\,,$$

   dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$. Per l'integrazione si usi l'identità $\frac{1}{(2-x)(1-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$.

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

4. Considerare la funzione:

   $$f(x,y) = x^2 e^{-x-y^2}\,.$$

   (a) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (b) In un punto generico $P(x,y)$, trovare la derivata direzionale della funzione f in direzione dell'asse delle x negative.

   (c) Trovare un vettore perpendicolare alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $(-1,1,1)$.

5. Si ricordi che le curve di livello per una funzione $z = f(x,y)$ sono curve nel piano xy definite da $f(x,y) = c$, dove c è una costante. La funzione $f(x,y)$ abbia derivate parziali continue. Dimostrare che il gradiente $\vec{\nabla} f$ è un vettore perpendicolare alle curve di livello.

13. 12. 2003

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   a) $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$.

2. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione
$$(P+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT\,,$$
dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in $\mathrm{Nm}^4/\mathrm{mol}^2$) e b (in $\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante). Calcolare il lavoro compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

3. In una reazione chimica $\mathrm{A}+\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 4 e 2 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dx}{dt}=k(4-x)(2-x)\,,$$
dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$. Per l'integrazione si usi l'identità
$$\frac{1}{(4-x)(2-x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{1}{4-x}\right)\,.$$

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t\to\infty$.

4. Considerare la funzione:
$$f(x,y)=x^2e^{-4x-y^2}\,.$$

   (a) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (b) In un punto generico $P(x,y)$, trovare la derivata direzionale della funzione f in direzione dell'asse delle x negative.

   (c) Trovare un vettore perpendicolare alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $(-1,2,1)$.

5. Si ricordi che le curve di livello per una funzione $z = f(x,y)$ sono curve nel piano xy definite da $f(x,y) = c$, dove c è una costante. La funzione $f(x,y)$ abbia derivate parziali continue. Dimostrare che il gradiente $\vec{\nabla} f$ è un vettore perpendicolare alle curve di livello.

13. 12. 2003

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   a) $\int (\frac{1}{5}x+1)^9\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (per parti: $\ln x = 1 \cdot \ln x$).

2. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione
$$(P + \frac{a}{V^2})(V-b) = RT\,,$$
   dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in $\mathrm{Nm^4/mol^2}$) e b (in $\mathrm{m^3/mol}$) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante). Calcolare il lavoro compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

3. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 3 e 2 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dx}{dt} = k(3-x)(2-x)\,,$$
   dove k (in $\mathrm{s^{-1}M^{-1}}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$. Per l'integrazione si usi l'identità $\displaystyle\frac{1}{(3-x)(2-x)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x}$.

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

4. Considerare la funzione:
$$f(x,y) = y^2 e^{-x^2-y}\,.$$

   (a) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (b) In un punto generico $P(x,y)$, trovare la derivata direzionale della funzione f in direzione dell'asse delle y negative.

   (c) Trovare un vettore perpendicolare alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $(1,-1,1)$.

5. Si ricordi che le curve di livello per una funzione $z = f(x,y)$ sono curve nel piano xy definite da $f(x,y) = c$, dove c è una costante. La funzione $f(x,y)$ abbia derivate parziali continue. Dimostrare che il gradiente $\vec{\nabla} f$ è un vettore perpendicolare alle curve di livello.

13. 12. 2003

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   a) $\int \cos(3x-1)\,dx$, b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$, c) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,dx$ (due volte per parti).

2. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione
$$(P + \frac{a}{V^2})(V-b) = RT\,,$$
dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in $\mathrm{Nm^4/mol^2}$) e b (in $\mathrm{m^3/mol}$) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante). Calcolare il lavoro compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2.

3. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 6 e 2 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dx}{dt} = k(6-x)(2-x)\,,$$
dove k (in $\mathrm{s^{-1}M^{-1}}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$. Per l'integrazione si usi l'identità
$$\frac{1}{(6-x)(2-x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{6-x}\right).$$

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

4. Considerare la funzione:
$$f(x,y) = y^2 e^{-x^2-4y}\,.$$

   (a) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (b) In un punto generico $P(x,y)$, trovare la derivata direzionale della funzione f in direzione dell'asse delle y negative.

   (c) Trovare un vettore perpendicolare alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $(2,-1,1)$.

5. Si ricordi che le curve di livello per una funzione $z = f(x,y)$ sono curve nel piano xy definite da $f(x,y) = c$, dove c è una costante. La funzione $f(x,y)$ abbia derivate parziali continue. Dimostrare che il gradiente $\vec{\nabla} f$ è un vettore perpendicolare alle curve di livello.