11. 12. 2004

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\, dx$, (b) $\displaystyle\int (3x-1)e^x\, dx$, (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$,

   (d) $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{sen}(x^2+1)\, dx$ (per sostituzione: $t = x^2+1$).

2. (a) Determinare la soluzione $y = y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine
   $$y'' - 3y' + 2y = 0\,,$$
   soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   (b) Trovare gli intervalli in cui $y = y(x)$ è crescente o decrescente e i minimi e massimi di $y(x)$.

   (c) Trovare gli intervalli in cui la funzione $y = y(x)$ è convessa o concava e i punti di flesso.

   (d) Calcolare $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

   (e) Disegnare il grafico di $y = y(x)$.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
   $$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
   con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\displaystyle\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$.

4. Calcolare approssimativamente
   $$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$
   con il polinomio di Taylor $p_2(x)$ di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, cioè calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{p_2(x)}{x}\, dx$.

   Nota: Una primitiva di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ non può essere espressa per mezzo di combinazioni finite delle cosiddette “funzioni elementari”.

5. Data la funzione $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$, calcolare il suo gradiente nel punto $P(1,1)$ e dire in quale direzioni la sua derivata direzionale in P è zero.

11. 12. 2004

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   (a) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{1}{2}x \, dx$, (b) $\int (5x-2)e^x \, dx$, (c) $\int_{-2}^{2} |x| \, dx$,

   (d) $\int x^2 \cdot \cos x^3 \, dx$ (per sostituzione: $t = x^3$).

2. (a) Determinare la soluzione $y = y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine
   $$y'' + 4y' + 3y = 0\,,$$
   soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

   (b) Trovare gli intervalli in cui $y = y(x)$ è crescente o decrescente e i minimi e massimi di $y(x)$.

   (c) Trovare gli intervalli in cui la funzione $y = y(x)$ è convessa o concava e i punti di flesso.

   (d) Calcolare $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

   (e) Disegnare il grafico di $y = y(x)$.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
   $$\frac{dy}{dx} = y(y-2)$$
   con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = 1$, (b) $y(0) = 2$, (c) $y(0) = 4$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\frac{1}{y(y-2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})$.

4. Calcolare approssimativamente
   $$\int_1^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} \, dx$$
   con il polinomio di Taylor $p_3(x)$ di grado 3 e di punto iniziale $x_0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione $f(x) = \cos x$, cioè calcolare $\int_1^{\pi/2} \frac{p_3(x)}{x} \, dx$.

   Nota: Una primitiva di $\frac{\cos x}{x}$ non può essere espressa per mezzo di combinazioni finite delle cosiddette "funzioni elementari".

5. Data la funzione $z = f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$, calcolare il suo gradiente di nel punto $P(1,1)$ e dire in quale direzioni la sua derivata direzionale in P è zero.

11. 12. 2004

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} 3x\,dx$, (b) $\displaystyle\int (1-4x)e^x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x|\,dx$,

   (d) $\displaystyle\int x\cdot\cos(x^2-1)\,dx$ (per sostituzione: $t = x^2-1$).

2. (a) Determinare la soluzione $y = y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine
   $$y'' - 4y' + 3y = 0\,,$$
   soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

   (b) Trovare gli intervalli in cui $y = y(x)$ è crescente o decrescente e i minimi e massimi di $y(x)$.

   (c) Trovare gli intervalli in cui la funzione $y = y(x)$ è convessa o concava e i punti di flesso.

   (d) Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

   (e) Disegnare il grafico di $y = y(x)$.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
   $$\frac{dy}{dx} = y(3-y)$$
   con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\displaystyle\frac{1}{y(3-y)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{y} + \frac{1}{3-y})$.

4. Calcolare approssimativamente
   $$\int_{-2}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$
   con il polinomio di Taylor $p_2(x)$ di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, cioè calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{p_2(x)}{x}\,dx$.

   Nota: Una primitiva di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ non può essere espressa per mezzo di combinazioni finite delle cosiddette "funzioni elementari".

5. Data la funzione $z = f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$, calcolare il suo gradiente nel punto $P(1,1)$ e dire in quale direzioni la sua derivata direzionale in P è zero.

11. 12. 2004

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_{3\pi}^{6\pi} \operatorname{sen}\frac{1}{3}x\,dx$, (b) $\displaystyle\int (1-4x)e^x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x|\,dx$,

   (d) $\displaystyle\int x\cdot\cos(x^2-1)\,dx$ (per sostituzione: $t = x^2-1$).

2. (a) Determinare la soluzione $y = y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine
   $$y'' + 3y' + 2y = 0\,,$$
   soddisfacente alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   (b) Trovare gli intervalli in cui $y = y(x)$ è crescente o decrescente e i minimi e massimi di $y(x)$.

   (c) Trovare gli intervalli in cui la funzione $y = y(x)$ è convessa o concava e i punti di flesso.

   (d) Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

   (e) Disegnare il grafico di $y = y(x)$.

3. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
   $$\frac{dy}{dx} = y(2-y)$$
   con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = 1$, (b) $y(0) = 2$, (c) $y(0) = 4$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\displaystyle\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y})$.

4. Calcolare approssimativamente
   $$\int_{-\pi/2}^{-1} \frac{\cos x}{x}\,dx$$
   con il polinomio di Taylor $p_3(x)$ di grado 3 e di punto iniziale $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ della funzione $f(x) = \cos x$, cioè calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{-1} \frac{p_3(x)}{x}\,dx$.

   Nota: Una primitiva di $\frac{\cos x}{x}$ non può essere espressa per mezzo di combinazioni finite delle cosiddette "funzioni elementari".

5. Data la funzione $z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, calcolare il suo gradiente nel punto $P(-1,1)$ e dire in quale direzioni la sua derivata direzionale in P è zero.