Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi

13. 10. 2006

1. Calcolare le seguenti somme parziali:
   a) $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + 1/243$,
   b) $2 + 2/11 + 2/11^2 + \cdots + 2/11^5$,
   c) $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + 1/64$.

2. Calcolare le somme delle serie:
   a) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ supponendo che $|r| < 1$,
   b) $c + c/2 + c/2^2 + c/2^3 + \cdots$,
   c) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - \cdots$ supponendo che $-1 < r < +1$.

3. Scrivere i numeri decimali illimitati

$$2.444444444\ldots, \qquad 1.032323232\ldots, \qquad 5.269999999\ldots$$

   (nelle scritture dei quali si immagina di proseguire ripetendo indefinitamente 4, 32 e 9 rispettivamente) in forma di frazione $\frac{m}{n}$, dove m e n sono interi.

4. Studiando la vita media di un gene dannoso, C. C. Li (Population genetics. 2nd impression. The University of Chicago Press, London-Chicago, 1958; p. 150) è giunto alla seguente serie infinita:

$$U = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \cdots$$

   dove $0 < w < 1$. Trovare un'espresssione concisa per U. (Nota: determinare prima la differenza $U - wU$).

5. Per studiare un problema di allevamento di consanguinei, O. Kempthorne (An introduction to genetic statistics. Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1957; p. 86) applica la successione

$$F_n = \frac{s}{2-s}[1 - (s/2)^n] + (s/2)^n F_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   per la quale $0 < s < 1$. Trovare come si comporta il limite di F_n per n tendente all'infinito.

6. Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2.3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva. ^{137}Cs è un pericoloso inquinante contenuto nel *fall-out* radioattivo. Supponiamo che ogni anno si liberi nell'ambiente la stessa massa M del ^{137}Cs. Qual è la massa totale che verrà accumulata (a) dopo n anni, (b) quando viene raggiunto l'equilibrio ($n \to \infty$)?

7. Eseguire le seguenti operazioni tra numeri complessi: a) $(2+3i)-(5-4i)$,

   b) $(3-2i)-(8-7i)$, c) $(3-2i)(4+5i)$, d) $\dfrac{3-2i}{4+5i}$, e) $\dfrac{4+5i}{3-2i}$, f) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

8. Determinare il modulo dei numeri complessi seguenti:

   a) $3+4i$, b) $5+6i$, c) $\dfrac{3+4i}{5+6i}$, d) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

9. Trovare i moduli e gli argumenti dei seguenti numeri complessi:

   a) $3+4i$, b) $3-4i$, c) $-1-i$, d) $5-5i$.

10. Si risolvano le seguenti equazioni rispetto ai numeri reali x e y:

    a) $(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy$, b) $(\dfrac{1+i}{1-i})^2 + \dfrac{1}{x+iy} = 1+i$,

    c) $(3-2i)(x+iy) = 2(x-2iy)+2i-1$.

11. Quali dei seguenti numeri complessi si possono ottenere da $z = x+iy$ geometricamente? Si faccia un disegno.

    a) $\overline{z} := x - iy$ (numero complesso coniugato), b) $\overline{(-z)}$, c) $-z$, d) $\dfrac{1}{z}$.

12. Si rappresentino graficamente i punti $z = x+iy$ che soddisfano le condizioni date:

    a) $|z| = 2$, b) $|z| < 2$, c) $|z| > 2$, d)$|z-1| = 2$, e) $|z+1| = 1$,

    f) $|z+1| = |z-1|$, g) $|z+i| = |z-1|$.

13. Si trovino: a) le due radici quadrate di i, b) le tre radici cubiche di $-8i$, c) le sei radici seste di 64.

14. Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado:

    a) $x^2+9=0$, b) $x^2+6x+25=0$, c) $\lambda^2 = 6\lambda - 18$, d) $p(p+12)+61=0$,

    e) $2u + \dfrac{6}{u} = 5$, f) $2s - 50 = s^2$.

15. Determinare la parte reale e la parte immaginaria di tutte le radici delle seguenti equazioni:

    a) $z^2 - i = 0$, b) $z^2 - 1 + i = 0$, c) $z^3 - i = 0$, d) $z^3 + 1 = 0$,

    e) $z^2 + 2iz + 3 = 0$, f) $z^2 - (1+i)z + 5 = 0$, g) $z^2 + z - i = 0$.