

## Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie Esercizi

20. 10. 2006

1. Sviluppare la potenza  $(p - 2)^5$ .
2. Qual è il coefficiente di  $a^3b^2c$  nello sviluppo della potenza  $(a + b + c)^6$  ?
3. Quanti sono i numeri di 7 cifre che si possono formare in notazione binaria?  
E quanti in notazione decimale?
4. Determinare quanti termini diversi si ottengono eseguendo la potenza

$$(a + b + c + d)^3.$$

5. Un giocatore del SuperEnalotto deve pronosticare i sei numeri estratti da novanta numeri. Quante sono le possibili scelte?
6. Consideriamo tre diversi caratteri ereditari controllati dalle coppie di alleli  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ .
  - a) Quanti sono i possibili genotipi distinti?  
Esempi di due genotipi distinti sono  $AabbCc (= AabbcC = aAbbCc = aAbbcC)$ ,  $AABbCC$ .
  - b) Quanti sono i possibili fenotipi?  
Si ricorda che il fenotipo è determinato dalla presenza o assenza di alleli dominanti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Ad esempio, i genotipi  $AabbCc$  e  $AAbbCc$  determinano lo stesso fenotipo  $AbC$ .
  - c) Quanti sono i possibili genotipi che danno origine al fenotipo  $ABC$ ?

7. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni  $\{a_n\}$  per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\text{a) } a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3n}, \quad \text{b) } a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad \text{c) } a_n = (1 - 10^{-3})^n,$$

$$\text{d) } a_n = (-1)^n, \quad \text{e) } a_n = \frac{3 - n}{5 - n}, \quad \text{f) } a_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n},$$

$$\text{g) } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{h) } a_n = (-2)^n, \quad \text{i) } a_n = \frac{3 - n}{n^2},$$

$$\text{j) } a_n = \frac{\sqrt{5n^2 + 1}}{n + 1}, \quad \text{k) } a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad \text{l) } a_n = (1 + 10^{-4})^n.$$

8. Supponiamo che una coltura batterica di *Escherichia coli* si trovi nella fase esponenziale della sua crescita. Si è osservato che la coltura si è quintuplicata in 46 minuti.
  - (a) Se inizialmente erano presenti  $N_0$  batteri, quanti batteri saranno presenti dopo 92 minuti?

- (b) Sia  $N(t)$  il numero dei batteri presenti quando è trascorso il tempo  $t$  (in minuti), e sia  $N_0 = N(0)$ . Determinare la costante  $\mu$  in modo tale che la crescita della coltura sia descritta mediante la funzione  $N(t) = N_0 5^{\mu t}$ .
  - (c) Determinare la costante  $\lambda$  in modo tale che  $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ .
  - (d) Si ricordi che il processo durante il quale si formano due cellule a partire da un singolo individuo è chiamato generazione, e il tempo richiesto per tutto il processo è detto *tempo di generazione*. Calcolare il tempo di generazione del batterio *Escherichia coli*.
  - (e) Qual è la percentuale dei batteri che in media si dividono in ogni minuto?
9. Il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero  $N(t)$  di atomi residui al tempo  $t$  può essere valutato in rapporto al numero  $N_0$  di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

- (a) Il cesio isotopo  $^{137}\text{Cs}$  perde annualmente il 2,3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva. Trovare la costante di decadimento  $\lambda$  (unità di misura?) per il  $^{137}\text{Cs}$ .
- (b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento  $T_{1/2}$  e  $\lambda$ ? Calcolare il tempo di dimezzamento di  $^{137}\text{Cs}$ .
- (c) Dopo quanti anni la radioattività del  $^{137}\text{Cs}$  si riduce a 1%?
- (d) Il cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$  ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Calcolare la costante di decadimento  $\lambda$  per il  $^{134}\text{Cs}$ .

Nel 1995 è stata fatta un'analisi del rapporto dell'attività del  $^{134}\text{Cs}$  sul  $^{137}\text{Cs}$  nei funghi. Si è trovato un rapporto di 1 : 40. Il rapporto nella nube radioattiva proveniente da Chernobyl in seguito all'incidente nei primi giorni del maggio 1986 era 1 : 2.

- (e) La provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl?

Anche l'eliminazione biologica (per via urinaria, fecale e respiratoria) delle sostanze radioattive dall'organismo umano è approssimativamente esponenziale ed è caratterizzato dal tempo di dimezzamento biologico  $T_{b1/2}$ . Il cosiddetto tempo di dimezzamento effettivo  $T_{\text{eff}}$  risulta sia dal decadimento radioattivo sia dall'eliminazione biologica della sostanza radioattiva.

- (f) Trovare la relazione fra il tempo di dimezzamento effettivo  $T_{\text{eff}}$ , il tempo di dimezzamento fisico  $T_{1/2}$  e il tempo di dimezzamento biologico  $T_{b1/2}$ .

Il cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$  ha un tempo di dimezzamento fisico di 2 anni e un tempo di dimezzamento biologico di 110 giorni (maschi).

- (g) Calcolare il tempo di dimezzamento effettivo del cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$ .