Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Esercizi 10. 11. 2006

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$
prendendo come punto iniziale $x_0 = 1$.

2. Sviluppare la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ in serie di Taylor di centro $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni (prendendo come punto iniziale $x_0 = 0$) e dire per quali valori di x la serie è convergente:

   a) $f(x) = \ln(1 + 2x)$, b) $f(x) = e^{2x}$, c) $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$,
   d) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, f) $f(x) = e^{-x}$.

4. Calcolare approssimativamente $\sqrt{2}$ con il polinomio di Taylor di grado 3 e di punto iniziale 0 della funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$ e valutare l'errore, cioè trovare una limitazione del resto di Lagrange.

5. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione
$$x + \cos x = 0$$
sostituendo la funzione $\cos x$ con il suo polinomio di Taylor $T_3(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$. Valutare l'errore che si commette approssimando $f(x) = \cos x$ con il polinomio $T_3(x)$, per $-1 < x < 0$, cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange $R_3(x)$, $-1 < x < 0$.

6. Calcolare i seguenti limiti:

   a) $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$, b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$, c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x}$, d) $\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{t}$,
   e) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$, f) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$, g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$,
   h) $\lim_{x\to 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$, i) $\lim_{x\to -1^-} (1 + \frac{1}{x})^x$, j) $\lim_{x\to -\infty} (\frac{x^2+3x}{x^2+1})^{-x}$.

7. Data la funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

   a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
   b) trovare i minimi e i massimi relativi e assoluti;
   c) determinare gli intervalli in cui è convessa o concava ed i punti di flesso;
   d) determinare gli asintoti;
   e) disegnare il grafico.

8. Calcolare gli integrali indefiniti

   a) $\int x^{-6}\, dx$, b) $\int t^{-1/3}\, dt$, c) $\int (u + 2u^2 + 3u^3)\, du$,
   d) $\int \cos(3\theta + 2)\, d\theta$, e) $\int (2x+1)e^{x^2+x}\, dx$, f) $\int (3t+2)^5\, dt$.