2. 2. 2007

# Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Alcune molecole di RNA consistono soltanto di $A$ = adenina, $C$ = citosina, $G$ = guanina, $U$ = uracile. Quante serie di cinque di tali costituenti possono essere formate se

   (a) si ammette la possibilità di una illimitata ripetizione della stessa base?

   (b) nessuna delle basi può comparire più di due volte nella serie?

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = t^{-1} + \sqrt{t}$, b) $y = \cos(x^3 + 1)$, (c) $y = \dfrac{x}{x-2}$, (d) $y = x \cdot \ln x$.

3. Data la funzione $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, calcolare:

   (a) i minimi e i massimi relativi;

   (b) gli asintoti;

   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = 1$.

4. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

5. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo $t$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove $k$ (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 2$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 1$, $[\mathrm{B}]_0 = 2$.

   (Per l'integrazione in (b) si usi l'identità $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$.)

6. Data la funzione $z = f(x, y) = x^2 - xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione $f$;

   (b) disegnare le curve di livello per $z = -1$, $z = 0$ e $z = 1$ (si veda l'esercizio 3) e dire se l'origine è un punto di minimo, massimo o un punto di sella;

   (c) calcolare la derivata direzionale di $f$ nel punto $P(1, 0)$ in direzione orientata dell'asse delle $y$ negative.

2. 2. 2007

# Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Alcune molecole di RNA consistono soltanto di $A$ = adenina, $C$ = citosina, $G$ = guanina, $U$ = uracile. Quante serie di sette di tali costituenti possono essere formate se

   (a) si ammette la possibilità di una illimitata ripetizione della stessa base?

   (b) nessuna delle basi può comparire più di quattro volte nella serie?

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, b) $y = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$, (c) $y = \dfrac{x}{3-x}$, (d) $y = e^x \cdot \ln x$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, calcolare:

   (a) i minimi e i massimi relativi;

   (b) gli asintoti;

   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = -2$.

4. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^{2x} \, dx$, (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, dx$.

5. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo $t$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove $k$ (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 1$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 3$, $[\mathrm{B}]_0 = 2$.

   (Per l'integrazione in (b) si usi l'identità $\dfrac{1}{(3-x)(2-x)} = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}$.)

6. Data la funzione $z = f(x, y) = 4xy - x^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione $f$;

   (b) disegnare le curve di livello per $z = -4$, $z = 0$ e $z = 4$ (si veda l'esercizio 3) e dire se l'origine è un punto di minimo, massimo o un punto di sella;

   (c) calcolare la derivata direzionale di $f$ nel punto $P(1, 0)$ in direzione orientata dell'asse delle $y$ negative.

2. 2. 2007

## Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Alcune molecole di RNA consistono soltanto di $A$ = adenina, $C$ = citosina, $G$ = guanina, $U$ = uracile. Quante serie di sei di tali costituenti possono essere formate se

   (a) si ammette la possibilità di una illimitata ripetizione della stessa base?

   (b) nessuna delle basi può comparire più di tre volte nella serie?

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = (\sqrt{t})^3$, b) $y = \cos(1-x)$, (c) $y = \dfrac{x}{x+2}$, (d) $y = x^2 \cdot \ln x$.

3. Data la funzione $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, calcolare:

   (a) i minimi e i massimi relativi;

   (b) gli asintoti;

   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = -1$.

4. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^x\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{4x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

5. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo $t$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x)\cdot([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove $k$ (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 4$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 3$, $[\mathrm{B}]_0 = 4$.

   (Per l'integrazione in (b) si usi l'identità $\dfrac{1}{(3-x)(4-x)} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-3}$.)

6. Data la funzione $z = f(x,y) = xy - x^2$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione $f$;

   (b) disegnare le curve di livello per $z = -1$, $z = 0$ e $z = 1$ (si veda l'esercizio 3) e dire se l'origine è un punto di minimo, massimo o un punto di sella;

   (c) calcolare la derivata direzionale di $f$ nel punto $P(1,0)$ in direzione orientata dell'asse delle $y$ negative.

2. 2. 2007

## Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Alcune molecole di RNA consistono soltanto di $A$ = adenina, $C$ = citosina, $G$ = guanina, $U$ = uracile. Quante serie di otto di tali costituenti possono essere formate se
   (a) si ammette la possibilità di una illimitata ripetizione della stessa base?
   (b) nessuna delle basi può comparire più di cinque volte nella serie?

2. Trovare le derivate di
   (a) $v(t) = \dfrac{1}{(\sqrt{t})^3}$, b) $y = \mathrm{sen}(1-x)$, (c) $y = \dfrac{x}{2-x}$, (d) $y = x^3 \cdot \ln x$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, calcolare:
   (a) i minimi e i massimi relativi;
   (b) gli asintoti;
   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $x_0 = 2$.

4. Calcolare gli integrali:
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} e^{2x} \, dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} \, dx$.

5. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo $t$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove $k$ (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 3$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 5$, $[\mathrm{B}]_0 = 4$.

   (Per l'integrazione in (b) si usi l'identità $\dfrac{1}{(5-x)(4-x)} = \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-4}$.)

6. Data la funzione $z = f(x,y) = x^2 - 4xy$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,
   (a) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione $f$;
   (b) disegnare le curve di livello per $z = -4$, $z = 0$ e $z = 4$ (si veda l'esercizio 3) e dire se l'origine è un punto di minimo, massimo o un punto di sella;
   (c) calcolare la derivata direzionale di $f$ nel punto $P(1,0)$ in direzione orientata dell'asse delle $y$ negative.