24. 2. 2007

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Il colore dell'occhio in *Drosophila melanogaster* è governato da una serie di 12 alleli: w^+ (rosso o tipo selvatico), w^{co} (corallo), w^{bl} (sangue), w^e (eosina), w^{ch} (ciliegia), w^a (albicocca), w^h (miele), w^{bf} (cuoio di bufalo), w^t (tinto), w^p (perla), w^i (avorio), w (bianco). Ogni allele ad eccezione di w ha l'effetto di produrre una certa quantità di pigmento a seconda della gerarchia:
$$w^+ > w^{co} > w^{bl} > w^e > w^{ch} > w^a > w^h > w^{bf} > w^t > w^p > w^i > w.$$
L'allele w^+ è completamente dominante rispetto agli altri, e w è recessivo rispetto a tutti gli altri. Eterozigoti con alleli diversi da w^+ danno luogo ad un fenotipo intermedio fra i colori dell'occhio degli omozigoti parentali.

   (a) Quanti sono i possibili genotipi? (b) Quanti sono i possibili fenotipi?

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, b) $y = \dfrac{1}{\log_{10}(100x)}$, (c) $y = \dfrac{\cos x}{x}$, (d) $y = x \cdot e^{3x}$.

3. Data la funzione $f(x) = x\ln(x^2)$, $x \neq 0$, calcolare:

   (a) i minimi e i massimi relativi, (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$,

   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $x = -e^{-1}$.

4. Calcolare gli integrali: (a) $\int_0^\pi x\cos x\,dx$, (b) $\int_6^9 (\frac{x}{3} - 1)^4\,dx$, (c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

5. La velocità della reazione chimica $A + B \longrightarrow P$ è uguale alla velocità di scomparsa o di A o di B. Si è trovato empiricamente che
$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B]\,, \tag{1}$$
dove $[A] = [A](t)$ è la concentrazione molare di A in funzione del tempo t (in s) e k è la costante specifica di velocità (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$).

   (a) Dalla (1) si ha in particolare $\dfrac{d[A]}{dt} = \dfrac{d[B]}{dt}$ in ogni istante t. Che cosa ne segue per il legame tra le funzioni $[A]$ e $[B]$?

   Si supponga che le concentrazioni iniziali di A e di B siano uguali e si trovi:

   (b) la forma integrata della (1), cioè la soluzione del problema di Cauchy:
$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2, \quad [A](0) = [A]_0\,,$$

   (c) il tempo di dimezzamento della concentrazione di A,

   (d) $\lim_{t\to+\infty} [A]$, e si disegni il grafico della funzione $[A]$.

6. Data la funzione $z = f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)x$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) disegnare la curva di livello $z = 0$,

   (b) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione f,

   (c) trovare i punti stazionari di f e classificarli.

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Il colore dell'occhio in *Drosophila melanogaster* è governato da una serie di 12 alleli: w^+ (rosso o tipo selvatico), w^{co} (corallo), w^{bl} (sangue), w^e (eosina), w^{ch} (ciliegia), w^a (albicocca), w^h (miele), w^{bf} (cuoio di bufalo), w^t (tinto), w^p (perla), w^i (avorio), w (bianco). Ogni allele ad eccezione di w ha l'effetto di produrre una certa quantità di pigmento a seconda della gerarchia:
$$w^+ > w^{co} > w^{bl} > w^e > w^{ch} > w^a > w^h > w^{bf} > w^t > w^p > w^i > w.$$
L'allele w^+ è completamente dominante rispetto agli altri, e w è recessivo rispetto a tutti gli altri. Eterozigoti con alleli diversi da w^+ danno luogo ad un fenotipo intermedio fra i colori dell'occhio degli omozigoti parentali.

   (a) Quanti sono i possibili genotipi? (b) Quanti sono i possibili fenotipi?

2. Trovare le derivate di

   (a) $v(t) = \sqrt[3]{t}$, b) $y = \dfrac{1}{\log_{10}(10x)}$, (c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, (d) $y = x \cdot e^{-x}$.

3. Data la funzione $f(x) = x\ln(x^2)$, $x \neq 0$, calcolare:

   (a) i minimi e i massimi relativi, (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$,

   (c) il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $x = e^{-1}$.

4. Calcolare gli integrali: (a) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$, (b) $\int_6^9 (\frac{x}{3} - 1)^5\, dx$, (c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

5. La velocità della reazione chimica $A + B \longrightarrow P$ è uguale alla velocità di scomparsa o di A o di B. Si è trovato empiricamente che
$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B]\,, \tag{1}$$
dove $[A] = [A](t)$ è la concentrazione molare di A in funzione del tempo t (in s) e k è la costante specifica di velocità (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$).

   (a) Dalla (1) si ha in particolare $\dfrac{d[A]}{dt} = \dfrac{d[B]}{dt}$ in ogni istante t. Che cosa ne segue per il legame tra le funzioni $[A]$ e $[B]$?

   Si supponga che le concentrazioni iniziali di A e di B siano uguali e si trovi:

   (b) la forma integrata della (1), cioè la soluzione del problema di Cauchy:
$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2, \quad [A](0) = [A]_0\,,$$

   (c) il tempo di dimezzamento della concentrazione di A,

   (d) $\lim_{t\to+\infty} [A]$, e si disegni il grafico della funzione $[A]$.

6. Data la funzione $z = f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)y$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

   (a) disegnare la curva di livello $z = 0$,

   (b) calcolare le derivate parziali del primo ordine della funzione f,

   (c) trovare i punti stazionari di f e classificarli.