

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. Se si lancia una moneta una sola volta, sono possibili due diversi risultati: “esce testa” (T) oppure “esce croce” (C). Ora si lancia la moneta 5 volte.

- (a) Quanti diversi risultati si possono avere?
 (b) Quanti di tali risultati contengono T esattamente 3 volte?
 (c) Quanti risultati contengono T almeno 3 volte?
 (d) Quanti risultati contengono C al più 2 volte?

2. Trovare le derivate:

(a) $v(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2$, (b) $y = \sin x \cos x$, (c) $T(u) = \frac{1}{2u + 3}$, (d) $y = x \log_{10} x$.

3. Una coltura batterica di *Salmonella typhi* ha un tasso di crescita specifico $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{0,027}{\text{min}}$ (dove $N = N(t)$ è la numerosità e t è il tempo).

- (a) Si calcoli il tempo di raddoppiamento (tempo di generazione) della coltura.
 (b) Di quale percentuale cresce la coltura in un'ora?

4. Calcolare (a) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt$, (b) $\int_{1/e^2}^{1/e} \frac{1}{x \ln x} dx$, (c) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$.

5. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a . Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$ (k è una costante, $k \neq 0$).

Supponiamo che in un ambiente di 21°C il corpo si raffreddi da 30°C a 28°C in 20 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 30°C , in quanto tempo il corpo raggiunge i 25°C ? Suggerimento:

- (a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 21^\circ\text{C}) \\ T(0) = 30^\circ\text{C}. \end{cases}$$

- (b) Si usi $T(20 \text{ min}) = 28^\circ\text{C}$ per determinare la costante k .
 (c) Si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 25°C .

6. Si consideri la funzione

$$z = f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

e se ne determinino:

- (a) il gradiente nel punto $(1, 1)$;
 (b) la curva di livello per la quota $z = 1$ (disegno!);
 (c) l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 1, 1)$;
 (d) i punti di minimo.