10. 6. 2009

Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie

1. (a) Quanti sono i numeri di 7 cifre che si possono formare in notazione binaria? Nota bene: La prima delle sette cifre deve essere diversa da zero.

   (b) Quanti di tali numeri contengono la cifra 1 esattamente 3 volte?

2. Trovare le derivate di

   (a) $R(s) = \dfrac{1}{a - bs}$, (b) $z(t) = e^{2t}\cos t$, (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, (d) $y = (1-x)^5$.

3. Nella fase esponenziale della crescita vale per il numero N di cellule in una coltura batterica di *Salmonella typhi*

   $$N = N(t) = N_0 e^{\lambda t},$$

   dove t è il tempo, $N_0 = N(0)$ e $\lambda = 0,028\ \text{min}^{-1}$.

   (a) Si calcoli il tempo di raddoppiamento (tempo di generazione) della coltura.

   (b) Quante ore ci vogliono affinché vi siano presenti $10^3\, N_0$ cellule?

4. Calcolare (a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sqrt{\frac{x}{2} + 1}\, dx$, (b) $\displaystyle\int t e^{-t}\, dt$, (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^3 \alpha}\, d\alpha$.

5. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a. Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

   $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

   Supponiamo che in un ambiente di 21 °C il corpo si raffreddi da 36 °C a 30 °C in 40 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 36 °C, in quanto tempo il corpo raggiunge i 26 °C? Si trovi la risposta in tre passi:

   (a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

   $$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 21\,^\circ\mathrm{C}) \\ T(0) = 36\,^\circ\mathrm{C}\,. \end{cases}$$

   (b) Si usi $T(40 \text{ min}) = 30\,^\circ\mathrm{C}$ per determinare la costante k.

   (c) Si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 26 °C.

6. Data la funzione

   $$z = f(x, y) = xy - x^2 - y^3, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

   determinare:

   (a) il gradiente di f nel punto $(1, 1)$;

   (b) la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ in direzione dell'asse delle x negative;

   (c) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, -1)$;

   (d) i punti stazionari di f e classificarli.