

Istituzioni di Matematica – Biotecnologie
Prova del 10/06/2009

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Scrivere le soluzioni nei riquadri.

1. (a) Quanti sono i numeri di 7 cifre che si possono formare in notazione binaria? Nota bene: La prima delle sette cifre deve essere diversa da zero.

- (b) Quanti di tali numeri contengono la cifra 1 esattamente 3 volte?

2. Dati i tre punti $A = (4, 5, 0)$, $B = (-6, 1, 1)$ e $C = (-2, 3, 1)$, calcolare

- (a) i vettori $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$,

- (b) il prodotto vettoriale (prodotto esterno) di \vec{a} e \vec{b} ,

- (c) l'equazione cartesiana del piano passante per i punti A, B, C ,

- (d) la distanza dell'origine dal piano passante per i punti A, B, C .

3. Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua.

- (a) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)$.

- (b) Calcolare $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{2x} f(t) dt \right)$.

4. Calcolare le derivate

- (a) $R(s) = \frac{1}{a - bs}$,

$$\frac{dR}{ds} =$$

- (b) $z(t) = e^{2t} \cos t$,

$$z'(t) =$$

- (c) $y = \frac{\log_{10} x}{\sqrt{x}}$,

$$y' =$$

(continua)

5. Calcolare

(a) $\int_{-2}^0 \sqrt{\frac{x}{2} + 1} dx =$

(b) $\int te^{-t} dt =$

(c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha =$

6. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a . Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

Supponiamo che in un ambiente di 21°C il corpo si raffreddi da 36°C a 30°C in 40 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 36°C , in quanto tempo il corpo raggiunge i 26°C ? Si trovi la risposta in tre passi:

(a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 21^\circ\text{C}) \\ T(0) = 36^\circ\text{C}. \end{cases}$$

$T(t) =$

(b) Si usi $T(40 \text{ min}) = 30^\circ\text{C}$ per determinare la costante k .

$k =$

(c) Si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 26°C .