Istituzioni di Matematica – C. d. L. in Biotecnologie
Soluzione degli esercizi 18. 10. 2004

1. Ponendo $q = 1 - 0,023 = 0,977 = 97,7\%$, la massa accumulata dopo n anni è $M_n = \frac{1-q^n}{1-q}M$, oppure (secondo il modello matematico scelto) $M_n = \frac{1-q^n}{1-q}qM$.

2. $M_{\text{equ}} := \lim_{n\to\infty} M_n = \frac{M}{1-q} = 43,5M$. Si arriva allo stesso risultato anche senza eseguire un limite: $0,023M_{\text{equ}} = M$.

3. $N(1 \text{ anno}) = \mathrm{N}_0 \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 1 \text{ anno}} = \mathrm{N}_0 - 0,023\mathrm{N}_0$, da cui si ricava
$$\lambda = -\frac{\ln(0,977)}{\text{anno}} = 0,023 \text{ anno}^{-1}.$$

4. $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 30$ anni.

5. $0,01N_0 = N_0e^{-\lambda t}$, da cui $t = \frac{\ln(100)}{\lambda} = 200$ anni.
Altro metodo: Dopo 7 tempi di dimezzamento, ossia 210 anni, la radiaoattività si riduce a $1/2^7 = 1/128 \approx 1\%$.

6. $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 0,35 \text{ anno}^{-1}$.

7. Sia t il tempo necessario per arrivare dal rapporto $1 : 2$ al rapporto $1 : 40$, e siano λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento di $^{134}\mathrm{Cs}$ e $^{137}\mathrm{Cs}$ rispettivamente. Si ottiene
$$\frac{2N_0e^{-\lambda_2 t}}{N_0e^{-\lambda_1 t}} = 40\,,$$
quindi $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = 20$ e $t = \frac{\ln(20)}{\lambda_1-\lambda_2} = 9$ anni, cioè la provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl.

8. $N(t) = N_0e^{\lambda_\mathrm{b} t}e^{\lambda t} = N_0e^{(\lambda_\mathrm{b}+\lambda)t} = N_0e^{\lambda_{\text{eff}} t}$, cioè $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_\mathrm{b} + \lambda$. Di conseguenza $\frac{\ln 2}{T_{\text{eff}}} = \frac{\ln 2}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, si veda l'esercizio 4. Risulta
$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}\,, \qquad T_{\text{eff}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\mathrm{b}1/1}} + \frac{1}{T_{1/2}}}\,.$$

9. $\frac{1}{T_{\text{eff}}} = (\frac{1}{110} + \frac{1}{730})$ giorni^{-1} e $T_{\text{eff}} = 96$ giorni.