Esercitazione di Matematica 13/11/2014 Dott. F. Greco

1. Dato il numero complesso z se ne determini modulo, argomento e scrittura in forma trigonometrica:

   (a) $z = 2i(4-3i) - i(4-2i)$

   (b) $z = 4\sqrt{3} + 4i$

   (c) $z = -\frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{2}{5}i$

   (d) $\left[\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{15} + isen\frac{\pi}{15}\right)\right]^{10}$

   (e) $[\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right)]^6$

   (f) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$

   (g) $\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+i}$

   (h) $\frac{(i-1)^3}{1+i}$

2. Calcolare le radici n-sime (con n indicato) del numero complesso z:

   (a) $z = -2+2i, \quad n = 5$

   (b) $z = -4i, \quad n = 6$

   (c) $z = -1, \quad n = 4$

3. Calcolare Imz e $|z|$, dove z è la soluzione dell'equazione:

$$(3+2i)\,\overline{z} = 2 + \sqrt{3}i$$

4. Calcolare il modulo e l'argomento del numero complesso:

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

   e verificare che $z^{10} = z$.

5. Siano $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $w = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Calcolare per quali valori dell'intero naturale n si ha

$$z^n + w^n + 1 = 0$$

6. Siano x e y rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso $(1+i)^n$ dove n e' un intero positivo. Dimostrare che si ha:
$$x^2 + y^2 = 2^n.$$

7. Si calcolino le radici quarte dell'unita' (in campo complesso) e le si rappresentino nel piano di Gauss. Cosa si osserva? Determinare quindi le soluzioni dell'equazione:
$$\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^4 = 1.$$

8. Dati $z = k - (k+1)i$ e $w = 1 + 2k - ki$. Si determini $k \in \mathbb{R}$ affinche':

   (a) $|z| = |w|$

   (b) $z\overline{w}$ sia immaginario puro

   (c) $\frac{w}{z}$ sia immaginario puro.

9. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

   (a) $2z + 4i = \overline{z}\,(1 + (Rez)^2 - Imz)$

   (b) $z^2 + 2\overline{z} = 2$

   (c) $z\,|z| = 2\overline{z}$

   (d) $|z^2| + 1 + 2z^2 = 0$

   (e) $(z^2+1)\,(z^6 + 2z^3 - 3) = 0$

10. Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti luoghi geometrici:

    (a) $A = \{z \in C : |z + 2i| = |z - 3|\}$

    (b) $A = \{z \in C : |z - 2i| = 3\}$

    (c) $A = \{z \in C : |z + 2i| \geq 1\}$

    (d) $A = \{z \in C : Re(z^2 - 3) = 0\}$

    (e) $A = \{z \in C : Im(z^2 - 2z + 3) = 0\}$