Matematica con Esercitazioni

14. 10. 2012

1. Trovare la somma di $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

2. Dati i tre punti $A = (-1, 0, 2)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (0, 1, 0)$, calcolare
   (a) i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$;
   (b) la distanza tra i punti A e B;
   (c) il prodotto scalare di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$;
   (d) l'angolo BAC in gradi e in radianti.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 6) Dati i vettori

$$\mathbf{v} = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-2, 0, 1),$$

   calcolare i vettori $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$, il modulo del vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e il versore del vettore $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$.

4. Dati i vettori $\mathbf{v} = (2 - i, 4 + 2i)$ e $\mathbf{w} = (-i, 2 - 2i)$ di $\mathbf{C}^2$, calcolate le loro norme (indotte dal prodotto scalare) e il loro prodotto scalare:
   (a) nello spazio vettoriale $\mathbf{C}^2$ su $\mathbf{C}$ con il prodotto interno standard;
   (b) nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{C}^2$ su $\mathbf{R}$ con il prodotto interno standard.

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sono lineari:
   (a) $f\colon (x, y) \mapsto (xy, x + y)$;
   (b) $f\colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1)$;
   (c) $f\colon (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$.

6. Dato il vettore $\vec{a} = (1, 3)$, determinare la sua proiezione secondo la direzione del vettore $\vec{b} = (1, 1)$.

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, pp. 70–71, Esercizio 22) Verificare che e il seguente "prodotto scalare" in $\mathbf{R}^2$ soddisfa effettivamente gli assiomi del prodotto scalare:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 4y_1y_2.$$

   Rispetto a questa struttura di spazio vettoriale con prodotto interno, rispondere alle seguenti domande:
   (a) I vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono ortogonali?
   (b) Quanto vale $|(1, 1)|$?
   (c) Determinare una base ortonormale in $\mathbf{R}^2$.