Matematica con Esercitazioni 20. 10. 2012

1. Dati i vettori $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (-1,1,-1)$, $\vec{c} = (1,0,1)$ in $\mathbf{R}^3$,
   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;
   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (d) trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Si dimostri che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ e $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

   Dato un generico vettore $\vec{r} = (a,b,c)$, si determinino c_1, c_2, c_3 in modo che valga la relazione $\vec{r} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 70, Esercizio 21) Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2,t,0,1)$ di $\mathbf{R}^4$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generato da $\mathbf{u} = (1,0,0,1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,0,1)$? Calcolare la dimensione dello $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ al variare di t.

4. Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcolare (se è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T$, $\mathbf{C}^{-1}$.

5. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata. È vero che allora la matrice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$ è simmetrica?

6. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e la trasformazione lineare $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ così definita:
$$F(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha+\beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$
   (a) Scrivere la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$.
   (b) Scrivere la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

7. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z(1+i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbf{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x+iy$ e $f(z) = \overline{x} + i\overline{y}$, trovare una matrice A tale che $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?