Matematica con Esercitazioni

27. 10. 2012

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbf{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:
   (a) geometricamente attraverso un disegno;
   (b) algebricamente.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 41, p. 103) Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche da
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare il nucleo e l'immagine di F, le loro dimensioni e una loro base.
   (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ viene rappresentata dalla matrice
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 45, p. 104) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalle relazioni:
$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$
dove e_1, e_2, e_3 sono la base canonica in $\mathbf{R}^3$. Dire se f è iniettiva, se è suriettiva se è biunivoca. Determinare $\dim \mathrm{Im(f)}$ e il rango della matrice che rappresenta f.

4. Siano $F, G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ le funzioni
$$F(x,y) := (ye^x, 2x + y^2) \quad \text{e} \quad G(x,y) := (\operatorname{sen}(x-y), x\cos y).$$
   (a) Calcolare le loro matrici jacobiane e scrivere le loro linearizzazioni in un intorno dell'origine $O = (0,0)$.
   (b) Scrivere la funzione composta $G \circ F$ e calcolare la sua linearizzazione in un intorno dell'origine (Nota bene: Non occorre calcolare le derivate parziali delle componenti della funzione composta.)

5. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.