Matematica con Esercitazioni

27. 10. 2013

1. Si considerino i vettori $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u} + \vec{v}$ e $-2\vec{u} - 3\vec{v}$.

2. Trovare la somma di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

3. Dati i vettori $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-3,2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

4. Trovare l'angolo tra i vettori $\vec{p} = (3,0,-4)$, $\vec{q} = (-2,2,1)$.

5. Dati i tre punti $A = (-1,0,2)$, $B = (-2,1,3)$ e $C = (0,1,0)$, calcolare
   (a) i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; (b) la distanza tra i punti A e B;
   (c) il prodotto scalare di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; (d) l'angolo BAC in gradi e in radianti.

6. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 5) Tra i seguenti vettori, individuare eventuali coppie di vettori paralleli o perpendicolari:
$$(2,-1,1), \qquad (1,2,-1), \qquad (1,4,2), \qquad (2,4-2).$$

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 6) Dati i vettori
$$\mathbf{v} = (1,2,3) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-2,0,1),$$
calcolare i vettori $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$, il modulo del vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e il versore del vettore $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$.

8. (Bramanti-Pagani-Salsa, pp. 70–71, Esercizio 22) Verificare che e il seguente "prodotto scalare" in $\mathbf{R}^2$ soddisfa effettivamente gli assiomi del prodotto scalare:
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 4y_1y_2.$$
Rispetto a questa struttura di spazio vettoriale con prodotto interno, rispondere alle seguenti domande:
   (a) I vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ sono ortogonali?
   (b) Quanto vale $|(1,1)|$?
   (c) Qual è la distanza tra $(1,0)$ e $(0,1)$?

9. Dato il vettore $\vec{a} = (1,3)$, determinare la sua proiezione secondo la direzione del vettore $\vec{b} = (1,1)$.

10. Sia $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un vettore arbitrario in $\mathbf{R}^n$. Usando la disuguaglianza di Schwarz, provare che
$$(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)^2 \leq n(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)\,.$$
Trovare un vettore $\vec{v}$ tale che nella precedente disuguaglianza valga il segno di uguale.

11. Trovare condizioni geometriche su $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ affinché valga $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ oppure $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.