Matematica con Esercitazioni

09. 10. 2013

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbf{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$ geometricamente attraverso un disegno e algebricamente.

2. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbf{R}^3$,

   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;

   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

   (d) trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

3. Sia π il piano passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 2)$ e $(1, 5, 1)$.

   (a) Trovare una base ortonormale del sottospazio π di $\mathbf{R}^3$ mediante il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

   (b) Calcolare la proiezione del vettore $(1, 2, 1)$ su π.

4. Dati i vettori $\mathbf{v} = (2 - i, 4 + 2i)$ e $\mathbf{w} = (-i, 2 - 2i)$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}^2$ su $\mathbf{C}$ con il prodotto interno standard, calcolate le loro norme (indotte dal prodotto interno) e il loro prodotto interno $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sono lineari e, in caso affermativo, scriverle in forma matriciale:

   (a) $f \colon (x, y) \mapsto (xy, x + y)$;

   (b) $f \colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1)$;

   (c) $f \colon (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$.

6. Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcolare (se è possibile) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$.

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 77, Esercizio 27) Scrivere la matrice che rappresenta, nel piano, la rotazione di: (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) π, (c) $-\frac{\pi}{2}$.

8. Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$.

   (a) Scrivere (e calcolare) la seconda colonna di $\mathbf{C}$ come combinazione lineare delle colonne di $\mathbf{A}$.

   (b) Scrivere (e calcolare) la terza riga di $\mathbf{C}$ come combinazione lineare delle righe di $\mathbf{B}$.

   (c) Calcolare $\mathbf{C}$ come somma delle matrici "k-esima colonna di $\mathbf{A}$ per k-esima riga di $\mathbf{B}$", $k = 1, 2$. Che cosa potete osservare quando confrontate le righe (o le colonne) di ciascun addendo?

   (d) Calcolare $\mathbf{C}$ elemento per elemento con il solito metodo "riga per colonna".