Matematica con Esercitazioni

16. 11. 2013

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:

   (a) geometricamente attraverso un disegno;

   (b) algebricamente utilizzando la matrice contragrediente della matrice di passaggio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot (1 + i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbb{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x + iy$ e $f(z) = \overline{x} + i\overline{y}$, trovare una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

3. Si dimostri che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ e $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, ossia la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$, le cui righe sono $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, è ortogonale.

   Dato un generico vettore $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, si determinino y_1, y_2, y_3 in modo che valga la relazione $\vec{v} = y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} + y_3\vec{v_3}$, cioè si trovi il vettore $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ in termini di $\mathbf{A}$ e di $(x_1, x_2, x_3)^T$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e la trasformazione lineare $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:
$$F(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha + \beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$

   (a) Scrivere la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

   (b) Scrivere la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

   (c) Determinare Ker(F), Im(F), le loro dimensioni e una loro base.