Matematica con Esercitazioni 07. 12. 2013

1. Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche dalla matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Nell'esercizio 1(b) del 23/11/2013 si è trovata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ viene rappresentata dalla matrice
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Si usi il risultato per trovare matrici invertibili $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ tali che $\mathbf{SAT}^{-1} = \mathbf{B}$. Le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ sono univocamente determinate?

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 54, p. 121) Calcolare gli autovalori (reali o complessi) e gli autovettori corrispondenti per le seguenti matrici:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare gli autovalori (reali o complessi) e gli autovettori corrispondenti per le seguenti matrici:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
Dire se le matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 57, p. 121) Un autovalore si dice *regolare* se la sua molteplicità geometrica coincide con la sua molteplicità algebrica. Dire se le seguenti matrici hanno autovalori regolari o no:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 58, p. 121) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
ammette come autovettore $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Scelto uno di questi valori k, dire se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

6. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 59, p. 122) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ composta di autovettori della matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$