Matematica con Esercitazioni 18. 10. 2014

1. In un sistema di riferimento cartesiano nel piano il punto P abbia le coordinate $(-\sqrt{3}, 1)$. Sia Q il punto che si ottiene ruotando P in senso antiorario attorno l'origine O di un angolo di 60°. Calcolate
   (a) le coordinate polari dei punti P e Q,
   (b) le coordinate cartesiane del punto Q.
2. Siano (θ, φ, ρ) (dove $-\pi < \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ \rho \geq 0$) coordinate sferiche nello spazio xyz tali che $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ e $z = \rho\cos\varphi$. Descrivete il luogo geometrico di tutti i punti dello spazio tali che: (a) $\rho = 2$, (b) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.
3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 18; si veda anche l'esercizio 1 del 11. 10. 2014) Calcolare un argomento dei numeri:
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$
4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 27) Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:
$$A = \left\{z \colon 1 < |z| < 2;\ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}, \qquad B = \{iz \colon z \in A\}.$$
N.B.: L'insieme B si ottiene attraverso una rotazione (centro e angolo?) di A.
5. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 21) Scrivere in forma algebrica $a + ib$ i numeri
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3, \quad (1+i)^{20}, \quad (1-i)^{11}, \quad (1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n.$$
6. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 26) Calcolare le seguenti radici n-esime nel campo complesso. Quando l'argomento di $\sqrt[n]{z}$ è un valore notevole, riscrivere in forma algebrica le radici (ad esempio: $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$).
$$\sqrt[3]{i-1}, \qquad \sqrt{-1+\sqrt{3}i}, \qquad \sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}.$$
7. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 23) Risolvere le equazioni
$$\text{(a)}\ \ (\mathrm{z}-2)^3 = -\mathrm{i} \qquad \text{(b)}\ \ \mathrm{z}^2 - (4+\mathrm{i})\mathrm{z} + 4 + 2\mathrm{i} = 0.$$
8. Risolvere nel campo complesso l'equazione: $z^2 - 3z + 3 + i = 0$. Scrivere le soluzioni in forma algebrica e rappresentarle graficamente nel piano complesso.
9. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizi 28-36) Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni nel campo complesso:
   (a) $z^2 + 2z + 3 = 0$ (b) $z^2 + 2iz - 3 = 0$
   (c) $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$ (d) $z^2 + \overline{z} = 0$
   (e) $i\,\mathrm{Re}\,z + z^2 = |z|^2 + 1$ (f) $z + 3i + (\mathrm{Re}\,z)\,(i + (\mathrm{Im}\,z)^2) = 0$
   (g) $iz^3 = \overline{z}$ (h) $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$
   (i) $(\overline{z})^4 = |z|$ (k) $2|z|^2 = z^3$