Matematica con Esercitazioni 25. 10. 2014

1. Dato il numero complesso $z = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, determinare il valore assoluto, la parte reale e la parte immaginaria di z^{-1}.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 277, Esercizi 111-115) Sia $z = x + iy,\ x, y \in \mathbf{R}$. Scrivere in forma algebrica $a + bi$ i seguenti numeri complessi:
$$e^{z^2}, \qquad e^{\bar{z}}, \qquad ie^{z}, \qquad e^{2z+3i}, \qquad e^{-iz}.$$

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 278, Esercizio 116) Sia $x \in \mathbf{R}$. Calcolare la parte reale del numero complesso:
$$\frac{1}{2+i}\, e^{(3-i)x}\,.$$

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, pag. 278, Esercizio 117) Sia $x \in \mathbf{R}$. Calcolare la parte immaginaria del numero complesso:
$$(5+2i)e^{-3x+2ix}\,.$$

5. Siano dati i vettori $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u}+\vec{v}$ e $-2\vec{u} - 3\vec{v}$.

6. Scomporre il vettore $\vec{w} = (-4, 3)$ lungo le direzioni dei vettori $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$ attraverso una costruzione geometrica ed esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso un calcolo.

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 2) Dati i vettori $(1, 1, -1)$ e $(0, 2, 1)$, verificare se il vettore $(1, 1, 1)$ si può ottenere come combinazione lineare di essi.

8. Dimostrare che i vettori $\vec{v}_1 = (1, -2, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 4)$, $\vec{v}_3 = (0, -1, -3)$ sono linearmente indipendenti ed esprimere $\vec{v}_4 = (-1, 2, 3)$ come combinazione lineare di essi.

9. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbf{R}^3$,
   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;
   (b) determinare $\dim \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
   (c) trovare una base di $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

10. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 70, Esercizio 21) Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2, t, 0, 1)$ di $\mathbf{R}^4$ appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generato da $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$? Calcolare la dimensione dello $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ al variare di t.