Matematica con Esercitazioni

8. 11. 2014

1. Sia π il piano passante per i punti $(0,0,0)$, $(2,1,2)$ e $(1,5,1)$.
   (a) Trovare una base ortonormale del sottospazio π di $\mathbf{R}^3$ mediante il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
   (b) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,1)$ su π.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sono lineari:
   (a) $f\colon (x,y) \mapsto (xy, x+y)$;
   (b) $f\colon (x,y) \mapsto (x-y, x+y+1)$;
   (c) $f\colon (x,y) \mapsto (2x-y, x+3y)$.

3. Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalle relazioni:
$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$
   dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica in $\mathbf{R}^3$. Si scriva la matrice associata ad f.

4. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{Bv}$, $\mathbf{vw}$, $\mathbf{wv}$.

6. Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$.
   (a) Scrivere la seconda colonna di $\mathbf{C}$ come combinazione lineare delle colonne di $\mathbf{A}$.
   (b) Scrivere la terza riga di $\mathbf{C}$ come combinazione lineare delle righe di $\mathbf{B}$.
   (c) Calcolare $\mathbf{C}$ come somma delle matrici "k-esima colonna di $\mathbf{A}$ per k-esima riga di $\mathbf{B}$", $k = 1, 2$. Che cosa potete osservare quando confrontate le righe (o le colonne) di ciascun addendo?
   (d) Calcolare $\mathbf{C}$ elemento per elemento con il solito metodo "riga per colonna".