Matematica con Esercitazioni

15. 11. 2014

1. Si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{i} - \mathbf{j})$:
   (a) geometricamente attraverso un disegno;
   (b) algebricamente utilizzando la matrice contragrediente della matrice di passaggio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Descrivere geometricamente l'applicazione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \cdot (1 + i\sqrt{3})$. Stabilire se f è $\mathbb{R}$-lineare. Scrivere f in forma matriciale, cioè posto $z = x + iy$ e $f(z) = \overline{x} + i\overline{y}$, trovare una matrice $\mathbf{A}$ tale che $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:
$$f(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha + \beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$
   (a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
   (b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.
   (c) Determinare Ker(f), Im(f), le loro dimensioni e una loro base.

4. Risolvere il seguente sistema lineare (nel quale rispetto all'esempio della lezione del 14/11/2014 solo il termine noto dell'ultima equazione è stato cambiato da 8 a 9) con l'algoritmo di Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases}.$$
   (Suggerimento: Dopo aver ridotto la matrice completa del sistema a una matrice a scala, si consiglia di riscrivere l'ultima riga di tale matrice come equazione. Qual è la conclusione che si può trarre?)