Matematica con Esercitazioni 06. 12. 2014

1. (a) Trovare la matrice $\mathbf{A}$ associata al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ nella base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j})$.
   (b) Calcolare il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{a} = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$ e di $\mathbf{b} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ utilizzando loro coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ e la matrice $\mathbf{A}$ di (a).
   (c) Calcolare il prodotto scalare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ utilizzando loro coordinate rispetto alla base canonica $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ di $\mathbb{R}^2$.
   (d) Dimostrare che $\mathbf{A}$ è una matrice definita positiva.

2. Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
   (a) calcolarne gli autovalori e gli autospazi corrispondenti;
   (b) determinare una matrice ortogonale $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}^T\mathbf{A}\mathbf{M}$ sia diagonale (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 118, Teorema 6.6).

3. Data la matrice di Pauli $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, calcolare
   (a) $\det(\sigma_2)$ e σ_2^{-1};
   (b) gli autovalori λ_1, λ_2 di σ_2;
   (c) una matrice unitaria $\mathbf{U}$ e la su inversa $\mathbf{U}^{-1}$ tale che $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.8, p. 119) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta di autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$ con una matrice di passaggio ortogonale di determinante 1 (una rotazione, per quale angolo?) e descrivere geometricamente l'endomorfismo definito da $\mathbf{A}$ (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$).

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, 6.10, p. 121) Descrivere geometricamente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   rispetto alla base canonica. Dire se la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, e in caso affermativo diagonalizzarla.