Matematica con Esercitazioni 10. 10. 2015

1. Trovate la somma e la differenza dei numeri complessi $z = 1 + 2i$, $w = 4 - 3i$, geometricamente usando vettori nel piano complesso. Verificate i risultati calcolando $z + w$ e $z - w$ algebricamente.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 30, Esercizio 16) Scrivere in forma algebrica ($z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:
$$\frac{(2+i)(1-i)}{3-2i}, \qquad \frac{1}{i(3+2i)^2}, \qquad \frac{(3+i\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}.$$

3. Risolvere nel campo complesso l'equazione
$$\frac{2iz-4}{z+5i} = -1 + 2i,$$
rappresentare la soluzione nel piano complesso e di essa calcolare il modulo.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 18) Calcolare il modulo dei numeri:
$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$

5. Quali dei seguenti numeri complessi si possono ottenere da $z = x + iy$ geometricamente? Si faccia un disegno.
(a) $\overline{z} := x - iy$, (b) $\overline{(-z)}$, (c) $-z$, (d) $\dfrac{1}{z}$ (solo per chi conosce l'inversione circolare).

6. Disegnare nel piano complesso il luogo dei punti z tali che:
(a) $|z| = 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 2$, (d)$|z - 1| = 2$, (e) $|z + 1| = 1$,
(f) $|z+1| = |z-1|$, (g) $|z+i| = |z-1|$, (h) $\mathrm{Re}(z^2) > 2$, (i) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -1$.
(Si ricordi che $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra z_1 e z_2. Re(z) denota la parte reale e Im(z) la parte immaginaria di z.)

7. Determinate nel campo complesso tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:
   (a) $z^2 + 6z + 25 = 0$,
   (b) $z^2 - (4 + i)z + 4 + 2i = 0$ (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 23; verificate che la derivazione della formula risolutiva vista a lezione funziona anche nel caso di coefficienti complessi),
   (c) $z^3 - 3z^2 - 3z + 7 = 0$
   (applicate la formula risolutiva senza trarre le radici cubiche).