Matematica con Esercitazioni

07. 11. 2015

1. Scomporre il vettore $\vec{w} = (-4, 3)$ lungo le direzioni dei vettori $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$ attraverso una costruzione geometrica ed esprimere $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso un calcolo.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 2) Dati i vettori $(1, 1, -1)$ e $(0, 2, 1)$, verificare se il vettore $(1, 1, 1)$ si può ottenere come combinazione lineare di essi.

3. Dati i vettori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$,

   (a) verificare se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono linearmente indipendenti;

   (b) determinare $\dim \operatorname{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

   (c) trovare una base di $\operatorname{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 70, Esercizio 21) Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2, t, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene al sottospazio $\operatorname{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ generato da $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$? Calcolare la dimensione dello $\operatorname{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ al variare di t.

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, pp. 70–71, Esercizio 22) Verificare che e il seguente "prodotto scalare" in $\mathbb{R}^2$ soddisfa effettivamente gli assiomi del prodotto scalare:

   $$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 4 y_1 y_2.$$

   Rispetto a questa struttura di spazio vettoriale con prodotto interno, rispondere alle seguenti domande:

   (a) I vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono ortogonali?

   (b) Quanto vale $\|(1, 1)\|$?

   (c) Qual è la distanza tra $(1, 0)$ e $(0, 1)$?

6. Dati i vettori $\mathbf{v} = (2 - i, 4 + 2i)$ e $\mathbf{w} = (-i, 2 - 2i)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{C}$ con il prodotto hermitiano standard, calcolate le loro norme (indotte dal prodotto hermitiano) e il prodotto hermitiano $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

7. Sia $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un vettore arbitrario in $\mathbb{R}^n$. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, provare che

   $$(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)^2 \leq n(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)\,.$$

   Trovare un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ tale che nella precedente disuguaglianza valga il segno di uguale.