Matematica con Esercitazioni

14. 11. 2015

1. Dati i vettori $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (-1,1,-1)$ in $\mathbb{R}^3$, trovare una base ortonormale di $\mathrm{Span}(\vec{a},\vec{b})$.

2. Sia π il piano passante per i punti $(0,0,0)$, $(2,1,2)$ e $(1,5,1)$.

   (a) Trovare una base ortonormale del sottospazio π di $\mathbb{R}^3$ mediante il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

   (b) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,1)$ su π.

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 71, Esercizio 24) Stabilire quali delle seguenti funzioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono lineari:

   (a) $f\colon (x,y) \mapsto (xy, x+y)$;

   (b) $f\colon (x,y) \mapsto (x-y, x+y+1)$;

   (c) $f\colon (x,y) \mapsto (2x-y, x+3y)$.

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Si scriva la matrice associata ad f.

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 42, p. 103) Si considerino la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori $\vec{b_1} = (1,2)$ e $\vec{b_2} = (2,0)$ e la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$f(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}) = (2\alpha + \beta)\vec{b_1} - \beta\vec{b_2}.$$

   (a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

   (b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

   (c) Determinare $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, le loro dimensioni e una loro base.

6. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$.

7. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{wv}$, $\mathbf{vw}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{Bv}$, $\mathbf{wB}$.